

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**IMPLANTACIÓN DE MODELOS DE DAÑO PARA LA
SIMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONCRETO
REFORZADO EN SU EVOLUCIÓN AL COLAPSO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL-ESTRUCTURAS

P R E S E N T A:

HILARIÓN MÉNDEZ MARTÍNEZ

TUTOR:

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

MEXICO D.F., AZCAPOTZALCO

FEBRERO DE 2012

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Tiziano Perea Olvera

Secretario: Dr. Gelacio Juárez Luna

Vocal: Dr. Gustavo A. Ayala Milián

Lugar de realización de tesis:

División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Gelacio Juárez Luna

FIRMA

“La ingeniería no es más que el sentido común de Dios”

Hilarión

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todo lo que me ha permitido vivir.

A mis padres, Hilarión Méndez Corpus y Ma. del Carmen Martínez Herrera, por haberme dado la vida, por todo su sacrificio, por sus cuidados, por su apoyo, pero sobre todo por su amor, sus consejos y enseñanzas de vida.

A mis hermanos: Adelina, Consuelo†, Irma, Oswaldo, Rodrigo, Cristina y Adán Hugo, por sus consejos y su incondicional apoyo en mi desarrollo como persona.

A la familia Ortiz Cardona por todas sus atenciones y por abrirme las puertas de su casa, en especial a la Srita. Rocío Ortiz Cardona por su cariño, paciencia y sacrificio en el transcurso de mis estudios de posgrado, así como también por sus consejos que me han ayudado a ser una mejor persona.

A la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca otorgada durante la duración de mis estudios de maestría.

A mi asesor, Dr. Gelacio Juárez Luna, por haberme dado la oportunidad de trabajar a su lado y por el tiempo dedicado para mi persona en el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales: Dr. Gustavo Ayala Milián y Dr. Tiziano Perea Olvera, por compartir su experiencia y sus conocimientos.

A todos mis profesores del posgrado, en especial a los profesores: Dr. Gelacio Juárez Luna, Dr. Arturo Tena Colunga, Dr. Manuel E. Ruiz-Sandoval Hernández, Dra. María de la Consolación Gómez Soberón y Dr. Oscar Manuel González Cuevas, por compartir sus conocimientos y experiencias que han sido fundamentales en mi desarrollo académico.

Índice

1. Introducción	1
1.1 Motivación	2
1.2 Objetivos de la investigación	7
1.2.1 <i>Objetivo general</i>	7
1.2.2 <i>Objetivos particulares</i>	7
1.2.3 <i>Organización de la tesis</i>	7
2. Modelos para simular daño en el concreto	9
2.1 Agrietamiento discreto	10
2.2 Agrietamiento distribuido	12
2.3 Discontinuidades interiores	15
2.4 Modelos de daño	16
3. Modelos constitutivos del acero	23
3.1 Comportamiento elastoplástico	26
3.1.1 <i>Condición de fluencia</i>	27
3.1.2 <i>Regla de flujo: flujo asociado</i>	32
3.2 Comportamiento plástico con endurecimiento	33
3.2.1 <i>Endurecimiento isotrópico</i>	34
3.2.2 <i>Endurecimiento cinemático</i>	37
3.2.3 <i>Endurecimiento mixto</i>	39
3.2.4 <i>Endurecimiento cinemático no lineal</i>	40
3.3 Adherencia entre el acero y el concreto	42
4. Modelos de Daño	44
4.1 Modelo de daño isotrópico: superficie de fluencia igual tensión y compresión (ITC)	45
4.1.1 <i>Generalización a 3D</i>	48
4.1.2 <i>Ecuación constitutiva</i>	49
4.1.3 <i>Criterio de daño</i>	50
4.1.4 <i>Regla de endurecimiento/ablandamiento</i>	51

4.1.5	<i>Condiciones de carga y descarga</i>	54
4.1.5.1	<i>Perspectiva geométrica</i>	55
4.1.5.2	<i>Perspectiva matemática</i>	55
4.1.6	<i>Módulo tangente</i>	57
4.2	Modelo de daño isotrópico: superficie de fluencia diferente tensión y compresión (DTC)	60
5.	Ejemplos de aplicación numérica	63
5.1	Espécimen de concreto simple con ranura al centro	64
5.2	Viga de concreto simple con sección variable con dos ranuras	66
5.3	Bloque de concreto simple con ranurado circular	68
5.4	Viga simplemente apoyada con sección constante y con ranura	71
5.5	Bloque de concreto con varilla de refuerzo embebida	74
5.6	Viga simplemente apoyada de concreto ligeramente reforzada	76
5.7	Losa circular de concreto reforzado	78
5.8	Viga de concreto reforzado de gran peralte	80
6.	Conclusiones y recomendaciones	82
6.1	Conclusiones	82
6.2	Recomendaciones	83
6.3	Trabajos futuros	83
	Referencias	84

Índice de figuras

Capítulo 1

Figura 1.1 Superficies de falla: a) tres superficies Murray <i>et al.</i> y b) multi superficie Lubliner <i>et al.</i>	3
---	---

Capítulo 2

Figura 2.1 Prueba de tensión idealizada	11
Figura 2.2 Curva: a) ablandamiento esfuerzo-ancho de grieta y b) esfuerzo-desplazamiento.	11
Figura 2.3 Grietas paralelas en el modelo de agrietamiento distribuido	12
Figura 2.4 Discontinuidades interiores: a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta (Juárez, 2006).	16

Capítulo 3

Figura 3.1 Barra sometida a esfuerzo de tensión uniaxial cíclico	26
Figura 3.2 Curvas esfuerzo – deformación idealizadas: a) elastoplástico perfecto, b) plástico perfecto, c) elastoplástico con endurecimiento y d) elastoplástico con ablandamiento.	27
Figura 3.3 Superficie de fluencia de von Mises: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora	29
Figura 3.4 Superficie de fluencia de Tresca: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora.....	30
Figura 3.5 Superficies de fluencia de von Mises y Tresca: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora	31
Figura 3.6 Convexidad y normalidad	33
Figura 3.7 Endurecimiento isotrópico: a) curva esfuerzo-deformación y b) evolución de la superficie de fluencia en el plano biaxial de esfuerzo.	34
Figura 3.8 Endurecimiento cinemático: a) curva esfuerzo-deformación uniaxial y b) evolución de la superficie de fluencia en el plano biaxial de esfuerzo.	37
Figura 3.9 Escalas de modelado para la adherencia	42
Figura 3.10 Malla de elementos finitos en zona de adherencia	43

Capítulo 4

Figura 4.1 Pieza con daño sometida a esfuerzo uniaxial de tensión.....	45
Figura 4.2 Módulo de elasticidad degradado por daño	48

Figura 4.3 Representación de normas: a) campo de esfuerzos y b) campo de deformaciones ...	51
Figura 4.4 Ley de endurecimiento/ablandamiento.....	53
Figura 4.5 Ley de endurecimiento/ablandamiento: a) lineal y b) exponencial.....	54
Figura 4.6 Condiciones de carga y descarga: a) campo de esfuerzos y b) campo de deformaciones	57
Figura 4.7 Igualdad y desigualdad de los módulos constitutivos tangente y elástico	58
Figura 4.8 Modelo diferente tensión y compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación	61

Capítulo 5

Figura 5.1 Geometría de espécimen con ranura al centro.....	64
Figura 5.2 Malla en 2D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada.....	64
Figura 5.3 Malla en 3D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada.....	65
Figura 5.4 Diagramas carga vs desplazamiento	65
Figura 5.5 Geometría de viga de sección variable.....	66
Figura 5.6 Malla en 2D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada.....	66
Figura 5.7 Malla en 3D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada.....	67
Figura 5.8 Diagramas carga vs desplazamiento	67
Figura 5.9 Geometría de bloque con ranura circular	69
Figura 5.10 Malla en 2D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC).....	69
Figura 5.11 Malla en 3D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC).....	70
Figura 5.12 Diagramas carga vs desplazamiento	70
Figura 5.13 Geometría de viga simplemente apoyada	71
Figura 5.14 Malla en 2D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC).....	72
Figura 5.15 Malla en 3D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC).....	72
Figura 5.16 Diagramas carga vs desplazamiento	73
Figura 5.17 Geometría de bloque con barra embebida	74
Figura 5.18 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada.....	75
Figura 5.19 Desplazamientos en la dirección de aplicación de la tensión	75

Figura 5.20 Diagramas carga vs desplazamiento	75
Figura 5.21 Geometría y refuerzo de viga simplemente apoyada	76
Figura 5.22 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada.....	77
Figura 5.23 Diagramas carga vs desplazamiento	77
Figura 5.24 Geometría y refuerzo de losa circular	78
Figura 5.25 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada (simplemente apoyada) y c) dañada (empotrada)	79
Figura 5.26 Diagramas carga vs desplazamiento (simplemente apoyada)	79
Figura 5.27 Diagramas carga vs desplazamiento (empotrada)	79
Figura 5.28 Geometría y refuerzo de viga de gran peralte	80
Figura 5.29 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada y b) dañada.....	81
Figura 5.30 Diagramas carga vs desplazamiento	81

CAPITULO 1

Introducción

El estudio y la simulación del comportamiento de las estructuras en su evolución hacia el colapso es un tema de gran interés en distintos campos de la ingeniería. En la ingeniería estructural, se considera que la mayoría de los materiales con los que se construyen las estructuras presentan un comportamiento elástico hasta que se alcanza un valor límite de esfuerzo o deformación, a partir del cual se inicia un comportamiento no lineal o inelástico, el cual, para efectos de análisis generalmente se considera como elastoplástico o plástico con endurecimiento. Lo anterior es razonablemente correcto para algunos materiales, sin embargo, se debe poner especial atención en el comportamiento del concreto, ya que este material inmediatamente después de alcanzar el valor límite presenta un ablandamiento por deformación que puede cambiar significativamente el comportamiento de las estructuras. Debido a que el comportamiento global de una estructura o elemento estructural depende fuertemente del comportamiento constitutivo del material o materiales de que están contruidos, es importante modelar de la manera más aproximada posible el comportamiento de los materiales.

Una falla físicamente se presenta como una o varias discontinuidades denominadas: fisuras en el concreto, fracturas en rocas, líneas de deslizamiento en suelos, y bandas de cortante en los metales y los suelos granulares (gravas, arenas). Dependiendo si la falla es abrupta o gradual, el material se considera frágil o dúctil respectivamente; es decir, un material frágil falla súbitamente a pequeñas deformaciones, mientras que un material dúctil lo hace gradualmente conforme aumentan las deformaciones. En general durante los procesos de carga de una estructura o elemento estructural, parte de la energía de deformación que se genera debido a las acciones de carga se libera desarrollando una superficie de falla (grietas).

Para describir el proceso de falla en medios continuos se han realizado estudios, los cuales concluyen que la falla es precedida por la aparición de una concentración de deformaciones localizadas en alguna zona del continuo, donde se genera daño y algunos otros efectos no lineales (Bazant y Planas, 1998). Lo que ocurre primeramente en esta zona es una afectación a nivel microscópico (formación de vacíos o dislocaciones de cristales), que posteriormente evolucionan a nivel macroscópico (formación de discontinuidades).

Actualmente existen algunos modelos para simular el comportamiento no lineal de los materiales en su evolución al colapso, como los de: agrietamiento distribuido, agrietamiento discreto, discontinuidades interiores y daño continuo.

En el presente trabajo, con la finalidad de describir el proceso físico de falla, se empleará la teoría de daño continuo para representar el comportamiento inelástico de los materiales en los que ocurre una degradación de rigidez en cuanto se alcanza un valor límite.

1.1 Motivación

Hasta el momento se han realizado importantes esfuerzos para el desarrollo de modelos constitutivos analíticos tratando de reproducir adecuadamente el comportamiento del concreto simple sujeto a cargas variables. Algunos de los primeros modelos que se desarrollaron (Gerstle, 1981; Ahmad y Shah, 1982) están basados en la teoría de la elasticidad. Las formulaciones actuales se basan en teorías generales de la mecánica de sólidos que incluyen la teoría de la plasticidad (Tresca, 1868; Saint-Venant, 1870), la teoría del daño (Kachanov, 1958; Lemaitre, 1986) y la mecánica de fractura (Griffit, 1921; Rice, 1968).

En la literatura especializada se considera que uno de los trabajos pioneros en el desarrollo de los modelos de daño isotrópico es el trabajo desarrollado por Kachanov (1958). En este trabajo se introducen los conceptos de deformación efectiva, esfuerzo efectivo y variable de daño escalar.

Entre los modelos de daño para el concreto se encuentra el modelo propuesto por Ahmad y Shah (1982) el cual se basa en la teoría de la elasticidad. Su formulación parte de la ley de Hooke con funciones no lineales que describen el comportamiento del concreto. Debido a que este modelo considera una correspondencia uno a uno entre esfuerzos y deformaciones, no resulta adecuado para predecir el comportamiento del concreto bajo cargas de gran intensidad ya que en estas condiciones para un sólo estado de esfuerzos se asocian diversos estados de deformación.

Otro modelo basado en la teoría de la elasticidad es el propuesto por Gerstle (1981), el cual se emplea para predecir el comportamiento del concreto sujeto a diversas historias de carga. Este modelo constitutivo puede no ser práctico si no se definen criterios adicionales para determinar el valor apropiado para la rigidez tangente del material.

Otros modelos propuestos en la literatura para predecir el comportamiento del concreto difieren en la proposición de la superficie de fluencia, las reglas de endurecimiento y las reglas de flujo. En particular entre la variedad de criterios de fluencia que se han propuesto para determinar la respuesta del concreto simple existen dos criterios que fueron de los primeros en utilizarse, el criterio de Mohr-Coulomb que data de 1800 y el criterio de Drucker-Prager (1952).

En los modelos de comportamiento que se desarrollan en la actualidad, casi nunca se considera el criterio de Mohr-Coulomb al momento de proponer la superficie de fluencia debido a que ésta presenta discontinuidades, lo que dificulta su implementación numérica; además, investigaciones experimentales recientes (Imran y Pantazopoulou, 1996) han determinado que este criterio no se ajusta adecuadamente al comportamiento observado.

Por el contrario, el criterio de Drucker-Prager usa una superficie de fluencia suavizada que se ajusta adecuadamente al comportamiento observado en pruebas experimentales realizadas en concreto simple sometido a compresión triaxial.

Es de interés mencionar que el modelo de Drucker-Prager sobrestima la capacidad del concreto cuando se somete a cargas del tipo compresión-tensión y tensión-tensión. Debido a la variación que presenta el comportamiento del concreto para diferentes tipos de cargas, se han propuesto modelos como los de plasticidad con varias superficies de fluencia. Murray *et al.* (1979) propuso un modelo con tres superficies (figura 1.1a) para predecir el comportamiento del concreto simple sujeto a carga biaxial. Chen y Chen (1975) y Lubliner *et al.* (1989) extendieron el concepto de Murray *et al.* hacia concreto cargado en tres dimensiones (figura 1.1b).

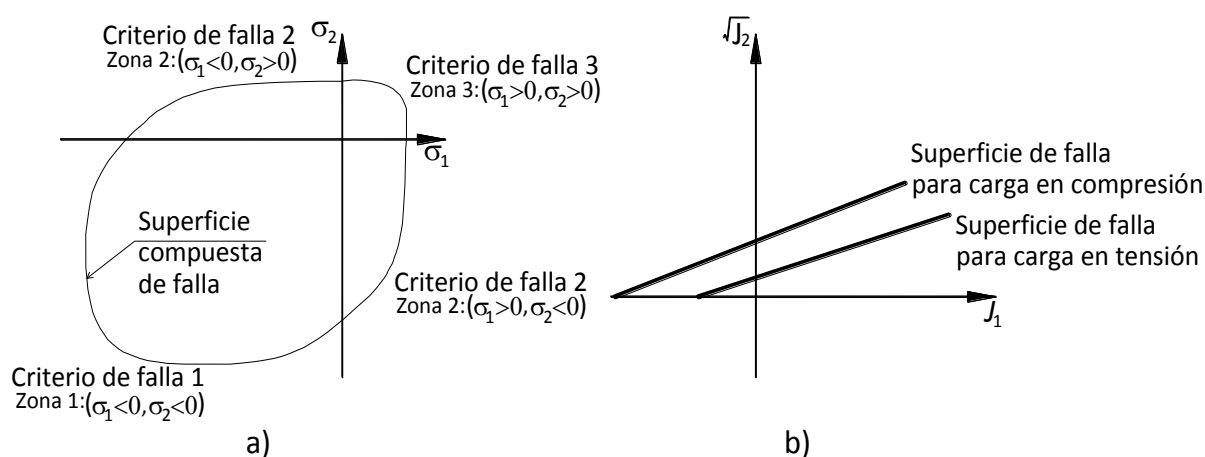


Figura 1.1 Superficies de falla: a) tres superficies Murray *et al.* y b) multi superficie Lubliner *et al.*

Diversos resultados experimentales muestran que el concreto sujeto a fuertes presiones hidrostáticas no responde elásticamente como se considera implícitamente en algunos de los modelos desarrollados (Drucker-Prager, 1952; Murray *et al.*, 1979; Vermeer y de Borst, 1984); este problema ha sido abordado en el desarrollo de diversos modelos que limitan el dominio elástico cuando existe una fuerte presión hidrostática. Los modelos formulados por Han y Chen (1985), de Boer y Dresenkamp (1989) consideran una relación no lineal entre $\sqrt{J_2}$ y J_1 . Otros modelos desarrollados presentan la característica de limitar la capacidad del concreto bajo presión hidrostática (Drucker *et al.*, 1975; Schofield y Wroth, 1968; Sandler *et al.*, 1976; Salami y Desai, 1990).

En el caso del concreto es más apropiado definir una superficie de fluencia que evolucione como una función de la historia de carga (Nicole, 1999). Así, la regla de endurecimiento define la evolución de dicha superficie. Diversos modelos suponen que la superficie de fluencia conserva la misma forma solo que se contrae o se expande según la historia de carga (Kupfer *et al.*, 1969; Chen y Chen, 1975; Murray *et al.*, 1979).

Algunos de los modelos propuestos consideran que la forma de la superficie de fluencia varia como los desarrollados por Han y Chen (1985), Ohtani y Chen (1988), de Boer y Dresenkamp (1989), Zaman *et al.* (1993).

Othani y Chen (1988), y Salami y Desai (1990), son algunos de los autores que han desarrollado modelos constitutivos basados en plasticidad considerando la hipótesis de flujo asociado. Sin embargo, otros estudios experimentales han concluido que la hipótesis de flujo asociado no es una buena suposición para predecir el comportamiento del concreto debido a que el concreto muestra dilatación en cortante, lo que genera un cambio en el volumen debido a la distorsión por corte que presenta el material. Han y Chen (1985), de Boer y Dresenkamp (1989), y Vermeer y de Borst (1984) desarrollaron modelos con base en la hipótesis de un flujo no asociado (la función de fluencia no es la misma que la función de potencial plástico) con el fin de mejorar los modelos para predecir el comportamiento del concreto.

La mecánica del daño es otra herramienta importante para modelar a nivel macroscópico el daño que ocurre en el material. La definición tradicional de material dañado es aquel material que ha perdido cierta rigidez. Para desarrollar modelos constitutivos fundamentados en la teoría del daño se requiere fijar reglas de daño. En la definición de las reglas de daño se puede incluir una superficie de daño para delimitar el rango elástico. Diversos de los modelos existentes en la literatura varían en la superficie de daño y en las reglas de daño utilizadas. Algunos de los primeros modelos constitutivos que surgieron basándose en la teoría del daño emplearon reglas de daño isotrópico (Kachanov, 1958; Lemaitre, 1986).

Otro tipo de modelos llamados de daño anisotrópico utilizan tensores de daño de segundo orden, *i.e.* (Murakami y Ohno, 1980; Murakami, 1983; Mazars y Pijaudier Cabot, 1989; Valanis, 1991; Chaboche, 1995; Voyiadjis y Deliktas, 2000; Lemaitre *et al.*, 2000; Carol *et al.*, 2001a, 2001b;), de cuarto orden, *i.e.* (Cordebois y Sidorff, 1979; Ortiz, 1985; Simo y Ju, 1987), o vectores de daño (Krajcinovic y Fonseka, 1981). Resende y Martin (1984) proponen un modelo que considera diversas reglas de daño para predecir el daño en los modos de respuesta desviadora y volumétrica, siendo atractivo dado el claro efecto de la presión hidrostática en el comportamiento del concreto.

En el modelo formulado por Govindjee *et al.* (1995), que es un modelo que cuenta con la consideración de daño direccionado, se propone que el potencial termodinámico para la

energía libre incluya la energía como resultado del material dañado. Este modelo presenta el problema de que tanto la rigidez como la resistencia sean ilimitadas en las direcciones paralelas a la superficie de la grieta. Este problema se ha abordado en modelos propuestos que consideran que la orientación de la superficie de grietas activas puede cambiar y para ello, emplean el método de introducir múltiples grietas fijas ficticias, *i.e.* (Litton, 1974; de Borst y Nauta, 1985; Riggs y Powell, 1986). Otro método es el de considerar que las grietas ficticias pueden rotar, *i.e.* (Cope *et al.* 1980); posteriormente este método fue mejorado por Bazant y Oh (1983), entre otros. El modelo desarrollado por de Borst y Nauta (1985) es el más apropiado para predecir el comportamiento de elementos estructurales de concreto reforzado (Nicole, 1999).

El concreto es un material que presenta plasticidad cuando se somete a cargas de compresión (Bahn y Hsu, 1998; Kosaka *et al.*, 1984), esta ocurre en menor medida en cargas de tensión (Reinhardt, 1984); particularmente el concreto presenta daño cuando se somete a cargas de tensión (Reinhardt, 1984) y en menor medida ante cargas de compresión (Bahn y Hsu, 1998). Por tanto es necesario desarrollar modelos que incorporen ambos mecanismos de respuesta. Desde la introducción de esta idea se han propuesto dos tipos de modelos elastoplásticos. Los modelos del primer tipo se basan en la teoría de la plasticidad y suponen que el material dañado es el resultado de la acumulación de deformaciones plásticas (Frantziskonis y Desai, 1987; Simo y Ju, 1987a, b; Ju, 1989; Lubliner *et al.*, 1989; Luccioni *et al.*, 1996). En el segundo tipo de estos modelos elastoplásticos se considera que los mecanismos tanto de daño como de plasticidad son independientes, por lo que el dominio elástico queda delimitado por la superficie de daño y la de plasticidad. El modelo desarrollado por Govindjee y Hall (1997) es un modelo de los del segundo tipo, pues considera un modelo de daño para predecir el comportamiento del concreto en tensión y en corte, y un modelo plástico para el comportamiento bajo compresión. Cuando se consideran independientes los mecanismos de daño y plasticidad se tiene una mejor eficiencia numérica (Nicole, 1999).

El concreto que se somete a una compresión o a una tensión de intensidad elevada, presenta un fenómeno que se le conoce como ablandamiento por deformación, el cual se caracteriza por la disminución de los esfuerzos en el material con un incremento en las deformaciones. Para el concreto sujeto a cargas de tensión, la falla corresponde al modo de fractura I (Nicole, 1999). Si se realiza una simulación con elementos finitos y el concreto se modela como un sólido continuo, se requiere de una distribución del daño sobre un volumen de material asociada al agrietamiento sobre una superficie, lo que produce una inconsistencia entre la energía disipada por unidad de volumen y la energía de fractura disipada por unidad de área, de acuerdo al procedimiento de prueba estándar RILEM (RILEM, 1985) para el plano de una viga de concreto sujeta al modo de fractura I. Para afrontar este conflicto, se utiliza la longitud característica del elemento finito. La introducción de esta longitud se fundamenta en las observaciones realizadas

a los resultados de modelos que no introducen una medida del tamaño de la malla, en los que se observa que dichos resultados dependen fuertemente de la discretización usada en la malla. Uno de los métodos que calculan adecuadamente la longitud característica es el propuesto por Bazant y Oh (1983), el cual propone un ancho de banda de agrietamiento que depende del área del elemento y de la dirección de propagación. Crisfield (1986) propuso que la longitud característica se defina por el Jacobiano en cada punto de integración de Gauss. Oliver (1989) presentó un método general para el cálculo del elemento de longitud característica, el cual depende del tamaño del elemento y del estado elástico de esfuerzos.

Estudios realizados por van Mier (1986), y Lee y William (1997) determinaron que el área bajo la curva esfuerzo-deformación para prismas de concreto sometidos a compresión uniaxial decrece conforme aumenta el tamaño de éstos, lo que implica que la falla por compresión es un fenómeno local similar a la fractura. Lubliner *et al.* (1989) sugirió que el área de un elemento de concreto sujeto a una carga de compresión pasando el pico de la curva esfuerzo-deformación sea considerada una propiedad del material y que la longitud característica sea tal que los resultados analíticos coincidan con los experimentales. Lee y William (1997) introdujeron el concepto de densidad de grieta h_c , que puede considerarse como un elemento de longitud característica, cuya función es la de mapear el área de una grieta que falla en compresión dentro del volumen de un sólido.

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es la formulación, implantación y validación de modelos de daño del concreto, los cuales acoplados con modelos de plasticidad en el acero, simulen estructuras de concreto reforzado en su evolución al colapso.

1.2.2 Objetivos particulares

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- Desarrollo de la formulación matemática de los modelos de daño con superficies de fluencia igual y diferente límite a tensión y compresión para el concreto.
- Implantación de los modelos constitutivos en 2D y 3D en el programa de elementos finitos FEAP acrónimo de Finite Element Analysis Program (Taylor, 2008)
- Simulación de sólidos sujetos a cargas de colapso.

1.2.3 Organización de la tesis

El contenido de esta tesis está distribuido en seis capítulos, los cuales se describen a continuación:

- El *capítulo 1* presenta la definición del problema y una revisión sobre los modelos que se han desarrollado para modelar el comportamiento constitutivo del concreto. Se incluyen, además, los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de este trabajo de tesis.
- En el *capítulo 2* se tratan las principales formulaciones existentes en la literatura para modelar el daño en el concreto, tales como: los agrietamientos distribuido y discreto, las discontinuidades interiores, y los modelos de daño.
- En el *capítulo 3* se da una revisión a los conceptos básicos de la teoría de la plasticidad con el fin de determinar el modelo constitutivo para el acero de refuerzo utilizado en este trabajo.
- En el *capítulo 4* se muestra el desarrollo, partiendo desde la deducción de ecuaciones básicas, de los dos modelos de daño correspondientes a este trabajo de tesis.

- El *capítulo 5* presenta distintos ejemplos de aplicación numérica y sus resultados. En todos los casos se hace una comparación entre los resultados numéricos y los reportados en la literatura.
- En el *capítulo 6* se presentan las conclusiones, observaciones y recomendaciones derivadas de este trabajo, así como también se sugieren algunos de los trabajos a desarrollar en un futuro.

CAPÍTULO 2

Modelos para simular daño en el concreto

En la literatura existen distintas aproximaciones empleadas para simular la pérdida de rigidez del concreto debido a la incursión en el rango inelástico. Cada una de ellas es muy particular debido a que parten de hipótesis consideradas como las más adecuadas según el problema a estudiar y los recursos disponibles. Las cuatro aproximaciones presentadas en este capítulo son formuladas e implementadas en conjunto con el método de los elementos finitos, algunas de estas aproximaciones se encuentran disponibles en programas comerciales de elementos finitos, sin embargo, existe la posibilidad de que no sean las adecuadas para algunos problemas, por lo que se tienen que formular e implementar otras aproximaciones.

La aproximación por agrietamiento discreto, tiene su principal ventaja en que al emplear elementos de interface se obtienen resultados aceptables; sin embargo, su principal desventaja es que se deben de conocer las zonas potenciales de agrietamiento al realizar una simulación.

Otra aproximación es la del agrietamiento distribuido. Esta tiene la ventaja de no necesitar remallado durante el proceso de simulación. Su principal desventaja es que presenta un fenómeno de atoramiento de esfuerzos. Esta aproximación considera en sus tres variantes que durante el proceso de análisis la grieta se mantiene fija, multidireccional o giratoria.

La tercera de las aproximaciones descrita es la de discontinuidades interiores, que a diferencia del agrietamiento discreto, ésta no necesita conocer anticipadamente las zonas de falla. En esta sección se detallan los dos tipos de discontinuidades que forman parte de este concepto, además de describir las diferentes relaciones constitutivas que pueden emplearse para el desarrollo de un modelo de este tipo.

La última aproximación que se presenta en este capítulo se basa en la mecánica del daño continuo; tal aproximación se denomina modelos de daño. En esta sección se describen algunos modelos de daño existentes en la bibliografía con sus principales características.

2.1 Agrietamiento discreto

En los trabajos pioneros de los análisis del fenómeno de agrietamiento con elementos finitos, las grietas se modelaron mediante la separación entre los bordes de los elementos, *i.e.* (Ngo y Scordelis, 1967; Nilson, 1968). Sin embargo, esta técnica tiene los inconvenientes del cambio continuo en la conectividad nodal, y una restricción de la grieta para seguir una trayectoria predefinida a lo largo de los bordes de los elementos. Para tratar estos inconvenientes, Ingraffea y Sauoma (1985) emplearon gráficos con la ayuda de algoritmos de remallado automático. Blaauwendraad y Grootenboer (1981) desarrollan técnicas que le permiten a las grietas discretas extenderse a través de los elementos finitos. Una de las razones principales del por qué no se han realizado desarrollos para tratar de resolver los inconvenientes que presenta el modelo se debe a que en diversos problemas de ingeniería se puede imaginar un mecanismo de grietas discretas que ceden en forma de un mecanismo lineal, por lo que los dos inconvenientes anteriores se reducen al utilizar grietas discretas de forma simple con una orientación predefinida.

Esta aproximación modela la grieta como una discontinuidad en el campo de desplazamientos al introducir elementos de interfaz que tienen un espesor nulo, estos elementos se ubican entre los bordes de los elementos sólidos, particularmente en las zonas predispuestas a sufrir agrietamiento. Se emplea una ecuación constitutiva discreta denominada tracción-salto para determinar el comportamiento del material en las interfaces, asumiendo que conforme la grieta se propaga y se abre existe una transferencia de esfuerzos entre los bordes (Juárez, 2006).

Hillerborg *et al.* (1976) realizaron un estudio para extender el enfoque de grieta discreta en el concreto, en el cual se propone que una grieta cohesiva puede aparecer en cualquier lugar del continuo, aunque no exista una macrogrieta; debido a esto, al modelo se le conoce como modelo de grieta ficticia. En la figura 2.1 se muestra una prueba a tensión en el concreto como la que Hillerborg presentó en su estudio de los años setentas, en la que se observa que antes de alcanzar el valor del esfuerzo a tensión último σ_u , al incrementar la carga, las deformaciones se conservan uniformemente distribuidas a lo largo del espécimen (arco OP). Cuando se alcanza el esfuerzo último a tensión, aparece una grieta cohesiva normal al eje de la barra en algún lugar del espécimen con una apertura finita w , en la que continua habiendo transmisión de esfuerzos, en este mismo instante el espécimen se descarga y sus deformaciones decrecen de manera uniforme a lo largo del segmento PB. Con esto Hillerborg supuso que la transferencia de esfuerzos a través de la grieta cohesiva depende de la apertura de la grieta, lo anterior se expresa como

$$\sigma = f(w) \quad (2.1)$$

Siendo $f(w)$ una característica del material determinada experimentalmente.

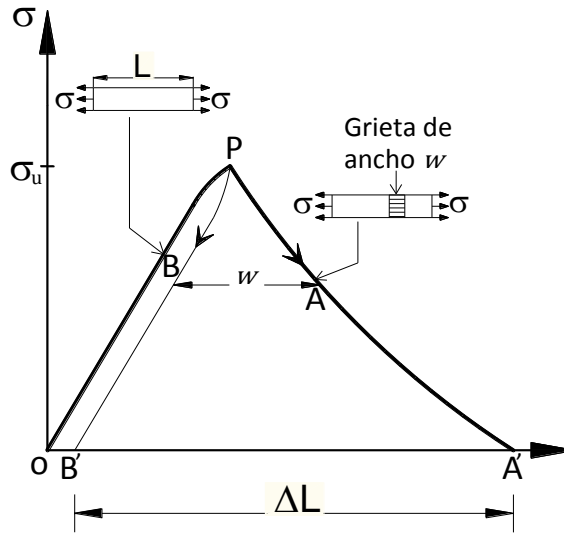


Figura 2.1 Prueba de tensión idealizada

La función definida por la ecuación 2.1 se representa en forma gráfica como una curva de ablandamiento, la cual se puede obtener del comportamiento global de un elemento y graficarse como se muestra en la figura 2.2a (Bazant y Planas, 1998). Esta curva cumple con la propiedad que al alcanzar el valor de σ_u la grieta presenta un ancho $w = 0$. La parte esencial del modelo de grieta cohesiva propuesto por Hillerborg es la curva de ablandamiento que se obtiene en forma experimental y es diferente para cada material.

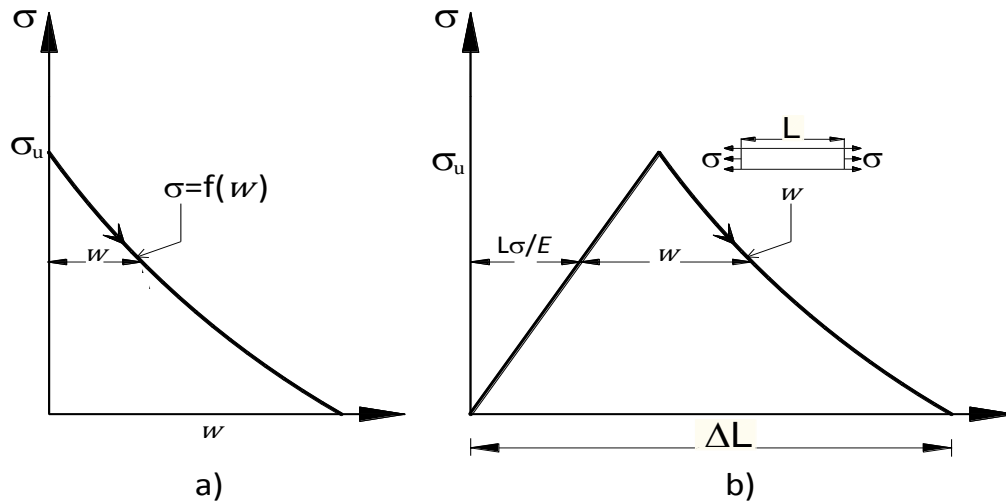


Figura 2.2 Curva: a) ablandamiento esfuerzo-ancho de grieta y b) esfuerzo-desplazamiento.

Hillerborg manteniendo los fundamentos del modelo original supuso para simplificar los análisis, despreciar las deformaciones en el rango no lineal en la curva de carga-descarga. Como ejemplo, considerando que un material se comporta globalmente de forma elástica lineal, la

curva de ablandamiento de la figura 2.1 que corresponde al alargamiento ΔL queda definida como se aprecia en la figura 2.2b (Bazant y Planas, 1998).

El uso de elementos de interfaz en el modelo de grieta discreta para simular el proceso de agrietamiento en el concreto es un factor determinante en la obtención de resultados aceptables. La desventaja principal al emplear dichos elementos es que las grietas sólo pueden ubicarse en las fronteras de los elementos sólidos, por lo que es necesario determinar la ubicación de los elementos antes de comenzar la simulación, lo que implica crear una serie de mallas, lo que resulta muy tedioso.

2.2 Agrietamiento distribuido

Este modelo fue empleado por primera vez por Rashid (1968), el cual, implementado en el método de los elementos finitos, ha sido de gran utilidad en el análisis de estructuras de concreto. En la década de los años setentas, el empleo de este modelo reemplazó rápidamente al de agrietamiento discreto debido principalmente a dos razones: la primera es que en el modelo de agrietamiento distribuido se conserva la topología de la malla de elementos finitos original, es decir, no es necesario un remallado durante el proceso de simulación del proceso de falla; la segunda es que no se necesita imponer restricciones con respecto a la orientación de los planos de agrietamiento.

El modelo de agrietamiento distribuido representa la pérdida de rigidez de los materiales, mediante un conjunto de grietas paralelas entre si distribuidas en todo el elemento finito como se muestra en la figura 2.3 (Juárez, 2006).

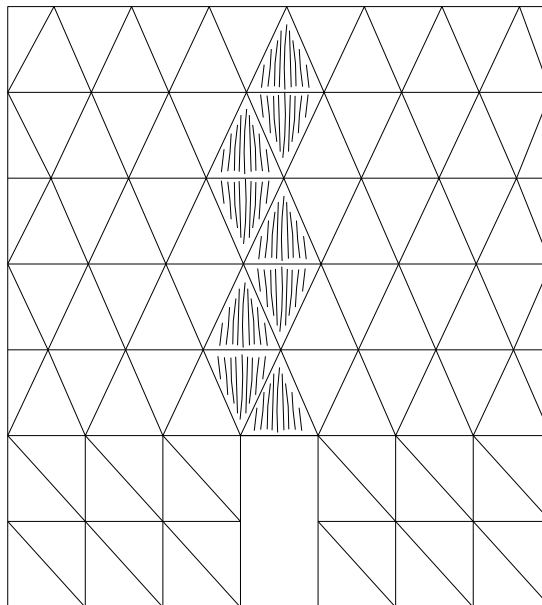


Figura 2.3 Grietas paralelas en el modelo de agrietamiento distribuido

Para modelar adecuadamente un conjunto de grietas paralelas se emplea el artificio de reducir tanto la rigidez como la resistencia del material en la dirección normal a las grietas después de alcanzar su resistencia última. En la evolución del proceso de falla de una estructura de concreto hacia el colapso se debe considerar el ablandamiento, el cual ocurre cuando se presenta una disminución de los esfuerzos que el material puede soportar y un incremento de las deformaciones en forma gradual.

La aproximación mediante agrietamiento distribuido se clasifica en tres enfoques, *i.e.* (Rots, 1988):

a) Grieta distribuida fija

El modelo de grieta distribuida fija considera que la transferencia del esfuerzo normal y del esfuerzo cortante es independiente entre ellos (anisotropía inherente). En este caso, el vector de esfuerzos principales no necesita coincidir con el de deformaciones principales. El concepto de modelo de grieta distribuida fija implica que la orientación de la grieta permanece fija durante todo el proceso de análisis, la orientación de esta grieta es perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo, incluso si el esfuerzo principal es mayor que la resistencia última a tensión del material (Juárez, 2006).

Esta aproximación descompone la deformación $\Delta\varepsilon$ en la suma de dos componentes, la deformación por grieta $\Delta\varepsilon^{gr}$ y la deformación del material sólido entre las grietas $\Delta\varepsilon^{co}$ (generalmente concreto), es decir

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{gr} + \Delta\varepsilon^{co} \quad (2.2)$$

b) Grieta distribuida fija multidireccional.

Una de las ventajas al descomponer la deformación en la suma de la deformación por grieta y la deformación en el concreto es que se puede hacer una sub-descomposición de ambas deformaciones a la vez. La sub-descomposición de la deformación está compuesta por la contribución por separado de diversas grietas multidireccionales que simultáneamente se producen en un punto determinado (Rots, 1988); matemáticamente lo anterior se expresa como:

$$\Delta\varepsilon^{gr} = \Delta\varepsilon_1^{gr} + \Delta\varepsilon_2^{gr} + \dots \quad (2.3)$$

En la que $\Delta\varepsilon_1^{gr}$ es el incremento en la deformación global debido a la primera grieta, $\Delta\varepsilon_2^{gr}$ es el incremento en la deformación global debido a la segunda grieta, y así sucesivamente. En el modelo de grieta distribuida fija multidireccional la orientación individual de cada grieta permanece fija durante todo el análisis.

El concepto de grieta distribuida fija multidireccional es particularmente importante en condiciones de esfuerzo biaxial o triaxial donde se espera que aparezcan varias grietas en distintas direcciones ortogonales, o en análisis con simetría axial y deformación plana donde numerosos puntos pueden agrietarse longitudinal y transversalmente.

c) Grieta distribuida giratoria

Este modelo fue propuesto por Cope *et al.* (1980) y considera que la dirección de la grieta coincide en todo momento con la dirección de la deformación principal, por lo que la grieta gira de acuerdo con la dirección de la deformación principal durante todo el proceso de análisis. Este concepto es atractivo desde un punto de vista ingenieril, ya que el analista puede especificar las curvas esfuerzo-deformación no lineales para las direcciones principales sin tener que consultar teorías complejas y abstractas.

La principal suposición de este modelo es que el vector de esfuerzos principales siempre coincide con el de las deformaciones principales, es decir, ambos son coaxiales; debido a ello, el modelo de grieta distribuida giratoria no establece explícitamente el tratamiento del cortante por deslizamiento y cortante por transferencia a causa de la trabazón mecánica de los agregados. Computacionalmente existe una simplificación y es razonablemente exacto bajo cargas monotónicas y cíclicas donde los esfuerzos principales no rotan mucho (Maekawa *et al.*, 2003).

Bazant y Oh (1983) planteó una serie de observaciones a las primeras versiones del concepto, dentro de las cuales destaca el hecho de que la suposición de considerar al material como ortotrópico generalmente implica el giro de los esfuerzos principales para desviarse del giro de las deformaciones principales, por consiguiente, cuando los ejes del material ortotrópico giran junto con los ejes de las deformaciones principales, ambos dejarán de coincidir con el de los ejes principales. Por lo que el uso directo de las curvas esfuerzo principal-deformación es incorrecto hasta que las reglas de transformación estén incluidas en la derivación del módulo de rigidez tangencial.

Como se mencionó anteriormente, el modelo de agrietamiento distribuido tiene la ventaja principal de no requerir remallado durante el proceso de análisis; sin embargo, este modelo puede presentar problemas importantes que afectan los resultados de la simulación (Rots, 1988), los cuales son:

- a) Los resultados dependen del tamaño de la malla así como de la orientación de los elementos, este efecto se puede minimizar refinando la malla.
- b) La simulación muestra modos cinemáticos falsos producidos por la falta de convergencia en el análisis.

- c) Este modelo presenta un fenómeno denominado atoramiento de esfuerzos, el cual ocurre como consecuencia de dos situaciones, la primera es la compatibilidad de los desplazamientos y la segunda es que la grieta no está alineada con algún borde del elemento finito que la contiene. Como resultado de ello, el elemento interior de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos que lo rodean; si estos elementos limitan dichas deformaciones, se produce un atoramiento de esfuerzos en el interior y no se descarga la banda por el ablandamiento.

2.3 Discontinuidades interiores

Este enfoque surge en la búsqueda de una aproximación que tome las ventajas de los dos modelos anteriores, localizar el daño y no necesitar un remallado, pero sin presentar sus problemas. La ventaja principal de este modelo es que se pueden introducir discontinuidades en los elementos durante la simulación sin la necesidad de modificar el mallado, pues no es necesario definir con antelación las zonas potenciales de falla, dado que las discontinuidades se pueden insertar en cualquier momento del análisis. Para distinguir el momento en que aparece una discontinuidad, el modelo emplea un criterio de falla y para determinar su ubicación dentro del continuo emplea un criterio de propagación; ambos criterios pueden ser sencillos como un criterio de fluencia o de daño, o pueden ser más complejos como un análisis de bifurcación (Runneson *et al.*, 1991). Los aspectos fundamentales que considera esta aproximación son el equilibrio en la discontinuidad y la cinemática de las deformaciones y desplazamientos. Este modelo se clasifica según las relaciones constitutivas utilizadas y al tipo de discontinuidad (Fernández, 2002).

Si a una barra se le aplica un esfuerzo de tensión de magnitud igual a la resistencia máxima a tensión del material como se observa en la figura 2.4, el análisis del proceso de falla se puede realizar insertando una discontinuidad en el campo de desplazamientos y empleando alguna relación constitutiva como se muestra a continuación:

- a) Aproximación continua.

Es una aproximación que considera al sólido como continuo en todos los puntos que lo componen, por lo que hace uso de la relación constitutiva $\sigma - \varepsilon$ en todo el dominio. Cuando en alguna zona del dominio aparecen concentraciones de deformaciones, es ahí donde comienza el proceso de falla en el material.

- b) Aproximación discreta.

En esta aproximación se considera que el sólido no es continuo por lo que se forma una grieta y es necesario emplear una relación constitutiva del tipo tracción-salto en la discontinuidad ($T - \llbracket U \rrbracket$), mientras que en el resto del sólido se emplea la relación constitutiva $\sigma - \varepsilon$.

Los tipos de discontinuidades que se pueden emplear en el modelo de discontinuidades interiores son: discontinuidades débiles los cuales consideran que el campo de los desplazamientos es continuo. Sin embargo, el campo de deformaciones es discontinuo debido al salto que se presenta a través de los bordes en la zona de localización y discontinuidades fuertes, que asumen que el campo de desplazamientos presenta saltos y que el campo de deformaciones no está acotado en dicha discontinuidad; esto último es debido a que en esta aproximación se considera que el ancho de la zona de localización tienda a cero.

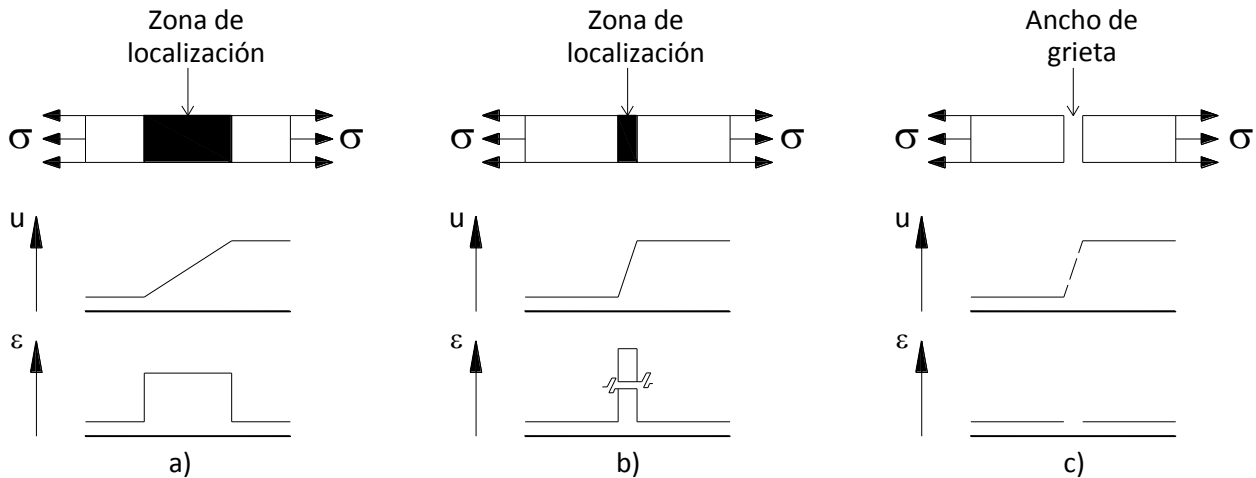


Figura 2.4 Discontinuidades interiores: a) discontinuidades débiles, b) discontinuidades fuertes y c) discontinuidad discreta (Juárez, 2006).

2.4 Modelos de daño

La mecánica del daño continuo es una herramienta importante que se puede emplear para describir el proceso de degradación de las propiedades mecánicas de los materiales; esta herramienta se ha vuelto cada día más útil. Actualmente, estos modelos se emplean para describir el comportamiento constitutivo de materiales como el concreto, cerámicos, rocas y demás materiales considerados como frágiles. La aplicación más interesante de estos modelos es en el concreto debido a que sus propiedades elásticas cambian con el daño. Los modelos deben considerar tres aspectos muy importantes que se presentan en los materiales antes mencionados, *i.e.*, la anisotropía inicial, la naturaleza direccionada del daño (incluso en materiales que son isotrópicos en un inicio), y el carácter unilateral del daño; esto último significa que un modelo debe de considerar si el daño está activo o inactivo, lo que depende básicamente de las condiciones de carga (Luccioni, 2003).

Las ecuaciones constitutivas para el material dañado se pueden derivar empleando conceptos micromecánicos y/o fenomenológicos. El primero se refiere a formular el comportamiento del material a nivel de mesoescala, basándose en mecanismos de la microescala, llegando generalmente a ecuaciones muy complejas que se alejan de lo práctico; el segundo se refiere a

que en su formulación no se consideran los detalles a nivel de microescala, es decir, se modela el daño de una manera indirecta al introducir variables internas basándose en asegurar que se cumplan las leyes de la termodinámica. La mayoría de los modelos desarrollados con el enfoque fenomenológico de daño hacen uso de la termodinámica de los procesos irreversibles.

Una observación importante es que la funcionalidad de los modelos de daño depende de la elección de la variable de daño más adecuada (escalar, vector o tensor de segundo, cuarto u octavo orden). En general, las variables de daño del tipo escalar han sido las más utilizadas para los modelos de daño isotrópico, el cual es el modelo a utilizar en esta investigación.

En la literatura existen diversos modelos de daño, y a continuación se da una breve descripción de los más comunes. El modelo a emplear en este trabajo es el modelo de daño escalar que es el primero que se aborda en esta sección, sin embargo, este modelo se explica con más detalle en el capítulo cuatro.

a) Modelo de daño escalar (caso particular del modelo de daño isotrópico).

Estos son los modelos de daño más sencillos utilizados para describir el proceso de degradación de las propiedades mecánicas de los materiales. En ellos se emplea una variable de daño escalar que afecta por igual a todas las componentes del tensor de rigidez elástico. Casi todos los modelos de daño escalar que se encuentran en la bibliografía se basan en la suposición de que el daño está íntimamente relacionado con la historia de las deformaciones. En estos modelos la relación entre el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ y el esfuerzo real σ se puede representar mediante

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-d)} \quad (2.4)$$

donde d es la variable de daño escalar, con un dominio de validez $[0,1]$, cero para el material no dañado y uno para el material totalmente dañado. Por ejemplo, si se considera un bloque sometido a un esfuerzo de tensión que se incrementa gradualmente desde cero hasta igualar el valor de la resistencia a la ruptura a tensión del material, se puede decir que; a partir de dicho límite, d es igual a cero mientras el esfuerzo aplicado no supere el límite elástico del material; d incrementará su valor hasta la fractura con d igual a la unidad.

En este modelo, debido a que la variable de daño es un escalar, todos los componentes del tensor de esfuerzo se degradan una misma cantidad, lo que significa que en este modelo se conserva el coeficiente de Poisson. Simo y Ju (1987), y Mazars (1982), desarrollaron algunas funciones umbrales de daño apropiadas para los materiales que tienen una resistencia similar tanto en tensión como en compresión; sin embargo, no es correcto aplicarlas a materiales como el concreto que presenta una resistencia en tensión muy inferior a la de compresión, por lo que en este caso es necesario que la función que define el umbral de daño diferencie tanto el estado de tensión como de compresión. Estudios que presentan funciones de umbral de daño

diferenciando con propiedades de daño diferentes en tensión y en compresión son: Lubliner *et al.* (1989), Oliver *et al.* (1990), Luccioni (1993), Barbat *et al.* (1997), Hanganu *et al.* (2002).

b) Modelo de daño direccionado o daño anisótropo.

Los modelos de daño anisótropo no utilizan variables de daño escalar, si no que utilizan:

- i. Vectores de daño: suponen que el daño solo existe en el plano normal a los esfuerzos principales máximos. Debido a esta hipótesis el vector de daño, $D = I n$, puede determinarse por su intensidad I y por un vector unitario n , que contiene los cosenos directores al esfuerzo principal máximo.
- ii. Tensor de daño de segundo orden: este enfoque surge de la necesidad de considerar en determinados problemas que la carga no es proporcional, o donde existe anisotropía más compleja. Esta idea se basa en la extensión del caso unidimensional de la correlación de espacios real o dañado y ficticio o no dañado al caso tridimensional.
- iii. Tensor de daño de cuarto orden: considera el caso general de anisotropía; utiliza la definición de esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ y el principio de equivalencia de deformaciones, lo que lleva a un tensor de daño de cuarto orden D_{ijkl} .
- iv. Variable de daño doble escalar: se utiliza particularmente para problemas con materiales compuestos donde los umbrales de daño son generalmente diferentes en tensión y en compresión. En este enfoque se emplean dos variables escalares que son independientes, las cuales son: D_s que actúa en los esfuerzos desviadores y D_n que actúa en las presiones hidrostáticas. Si un determinado material no está propenso a sufrir daño en determinadas direcciones, el daño puede considerarse del tipo isótropo o anisótropo.

Carol *et al.* (2001a, 2001b) desarrollaron un modelo de daño direccionado empleando una formulación de degradación elástica y daño en pequeñas deformaciones parecida a la empleada en la elasto-plasticidad clásica. De manera similar al umbral de fluencia, en esta formulación se hace uso de una función que depende de un grupo de variables internas con las que se define una superficie elástica que, una vez alcanzada, comienza el proceso de degradación debido al daño. En este modelo se emplean un tensor de segundo orden para interpretar el daño de manera consistente y la suposición de equivalencia de la energía. Una de las ventajas del modelo propuesto por estos autores, en comparación con otros modelos de daño direccionado, es que se pueden obtener soluciones cerradas para algunos casos donde la carga es simple como la tensión uniaxial.

c) Modelo de daño unilateral.

Como se comentó anteriormente, el significado de unilateral al hablar de daño corresponde a que éste puede estar activo o inactivo, algo que es dependiente de las condiciones de carga. Para la mayoría de los materiales se puede decir que la pérdida de la rigidez en tensión se debe a que se desarrollan fisuras que se pueden cerrar si se revierte la carga con su respectiva recuperación de rigidez según lo visto en experimentos realizados.

Chaboche (1992, 1993) estudió varias teorías, algunas basadas en escalares, otras en vectores y otras más en tensores de segundo y cuarto orden utilizadas para simular la anisotropía y la recuperación de la rigidez en materiales frágiles. Concluyó al final del estudio que la mayoría de las formulaciones eran incapaces de predecir tanto la anisotropía como la unilateralidad del daño que corresponde al cerrado de las grietas bajo cargas de compresión.

Un modelo de daño del tipo unilateral para el concreto debe ser capaz de considerar aspectos como: diferenciar el daño que producen las cargas de tensión y de compresión, el cambio que se produce en la rigidez cuando las deformaciones o los esfuerzos principales cambian de signo (unilateralidad), la matriz de flexibilidades debe ser simétrica, y la respuesta debe de ser continua aun en condiciones de daño unilateral.

Algunos de los modelos de daño unilateral que existen en la literatura son: modelo de daño unilateral con variables escalares (Mazars y Pijaudier Cabot, 1989), modelo de daño anisótropo con enfoque de unilateralidad por descomposición espectral del tensor de deformaciones (Ju, 1989), modelo de daño anisótropo y unilateral (Chaboche, 1995), y modelo de daño escalar unilateral (Martín, 2001).

En el Modelo de daño unilateral con variables escalares (Mazars y Pijaudier Cabot, 1989) se hace la hipótesis de que el material es elástico y frágil. Emplea dos variables de daño, una para los esfuerzos de tensión y otra para los de compresión, y para considerar la unilateralidad el tensor de esfuerzos se compone de la suma de una parte positiva y otra negativa. Este modelo no puede describir la anisotropía que se induce por el daño, sin embargo, es un modelo simple.

En el modelo de daño anisótropo, con un enfoque de unilateralidad por descomposición espectral del tensor de deformaciones (Ju, 1989), se utiliza un tensor de cuarto orden como variable interna. Para considerar el concepto de unilateral dentro del modelo se hace una descomposición espectral del tensor de deformaciones con lo que se tienen que definir operadores de proyección espectral.

En el modelo de daño anisótropo y unilateral (Chaboche, 1995) se propone la combinación de la condición unilateral para la apertura y cerrado de grietas con la ecuación que describe la evolución del daño anisótropo, creando una herramienta importante para predecir la

anisotropía inducida por el daño en materiales que son en un principio isótropos sometidos a complejas cargas variables.

El modelo de daño escalar unilateral (Martín, 2001) nace al generalizar el modelo de daño escalar explícito, incorporando además la condición de unilateralidad considerada por Chaboche (1995) pero extendida para tomar en cuenta el daño en compresión. Emplea dos variables internas de daño, d^+ y d^- para el daño en tensión y daño en compresión, respectivamente, y cuyos valores varían como se ha mencionado desde cero hasta uno.

d) Modelo de daño viscoso.

Para realizar análisis dinámicos transitorios en estructuras, o en sus componentes, en su evolución al colapso (en las que se presentan altas tasas o velocidades de deformación como en el caso de estructuras sujetas a excitaciones de tipo explosivo o impacto) es fundamental que las relaciones constitutivas que gobiernan el problema estén en función del tiempo. Lo anterior ha motivado a formular modelos en los que la relación constitutiva dependa del tiempo principalmente por dos razones particulares.

La primera es que diversos estudios experimentales concluyen que la resistencia y la respuesta de ablandamiento o endurecimiento de diversos materiales se ve bastante afectada cuando se someten a tasas de deformación que rebasan el valor de 0.1^{-1} s. Por ejemplo, a mayor tasa de deformación, los materiales presentan mayor resistencia tanto en tensión como en compresión; a diferencia, el módulo de ablandamiento tiende a disminuir, efecto que no puede predecirse por las relaciones constitutivas que son independientes del tiempo.

La segunda es que al realizar análisis con modelos constitutivos independientes del tiempo, una vez que aparece el ablandamiento las ecuaciones que rigen el problema cambian, presentándose un problema de ablandamiento mal condicionado. Por ejemplo, en el caso de un problema dinámico, las ecuaciones de movimiento son hiperbólicas y debido a este problema se pueden volver elípticas o parabólicas. Se ha demostrado que este ablandamiento mal condicionado puede eliminarse si en las formulaciones de los modelos constitutivos se considera apropiadamente la dependencia de la tasa de deformación (Luccioni, 2003).

El considerar la velocidad de deformación en los modelos de daño es una forma adecuada de evitar el problema que induce el comienzo del ablandamiento. A tal hecho se le conoce como regularización viscosa cuya estructura es completamente análoga a la regularización visco-plástica de Perzyna (Perzyna, 1966). En algunos modelos formulados con la ayuda de la teoría de la plasticidad se ha considerado la tasa de deformación lo que origina los llamados modelos visco-plásticos.

Un modelo viscoso es el modelo de daño escalar explícito dependiente del tiempo (Simo y Ju, 1987; Ju, 1989). Este modelo es una extensión del modelo de daño escalar explícito independiente del tiempo con ciertas modificaciones como la inclusión de un coeficiente de fluidez de daño μ el cual es una constante del material y una función escalar que interpreta el flujo de daño viscoso lineal. Si el coeficiente μ tiende a infinito, se trata del modelo de daño escalar explícito independiente del tiempo. El modelo dependiente del tiempo predice la disminución de la no linealidad de las curvas esfuerzo-deformación a mayor tasa de deformación, esto significa que para grandes velocidades de deformación el desarrollo de grietas a nivel microscópico se retarda.

Un modelo viscoso especial para el concreto es el modelo de daño escalar implícito dependiente del tiempo (Luege *et al.*, 2002) que es resultado de hacer una extensión del modelo de daño escalar no dependiente de tiempo empleando una regla de evolución de daño semejante a la deformación visco-plástica de Perzyna (Perzyna, 1966). Esta formulación es específica para simular problemas dinámicos transitorios de elementos de concreto debido a que se realiza la correcta predicción de la sobre resistencia y la modificación en la forma de la curva de endurecimiento/ablandamiento que presenta el concreto bajo altas tasas de deformación (Luccioni, 2003).

e) Modelos de daño acoplados con plasticidad.

El daño sólo influye en las deformaciones irreversibles o plásticas porque el área que resiste los esfuerzos se reduce conforme disminuye el número de ligaduras microscópicas, sin embargo, el daño no afecta de manera directa los mecanismos de deslizamiento que son los que provocan las deformaciones permanentes, es decir, no hay un acoplamiento de estado. Los mecanismos de interacción entre el daño y las deformaciones plásticas son muy complejos por lo que no basta con un solo modelo para poder predecir su comportamiento.

Los modelos de daño abordados hasta el momento son para describir el comportamiento elástico. La teoría sin acoplamiento, la hipótesis de elasticidad desacoplada y el acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño son las tres opciones que se tienen para que al momento de formular un modelo, éste considere tanto el comportamiento elástico como el endurecimiento plástico. En la formulación del modelo también se debe considerar si los mecanismos de daño y plasticidad son iguales o no, lo que afectaría las leyes de evolución. Para ello existen tres opciones disponibles: la primera opción es considerar solo un mecanismo que sea regido por la plasticidad, es decir, no habrá daño si no hay plasticidad y viceversa. La segunda opción es considerar que existe solo un mecanismo de disipación dividido en dos partes. La tercera opción y la más usada en la formulación de modelos de daño es considerar por separado los dos mecanismos por lo que habrá dos potenciales de disipación.

El modelo de daño escalar implícito acoplado con plasticidad (Simo y Ju, 1987a, 1987b) emplea una ecuación que corresponde al acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño indicada anteriormente para considerar la plasticidad y el daño de manera simultánea. Para el caso de definir las leyes de evolución de la plasticidad y daño, este modelo emplea la opción de considerar por separado los dos mecanismos. Para resolver el modelo se hace uso del procedimiento matemático del tipo retorno mapeado, el problema se resuelve de forma separada, es decir, primero se resuelve el problema de daño y luego el problema plástico.

EL modelo de daño escalar acoplado con plasticidad (Luccioni *et al*, 1996) resuelve la parte de degradación de rigidez al igual que la parte plástica en el mismo instante. Para considerar el comportamiento elástico y de endurecimiento plástico el modelo hace uso de la hipótesis de la elasticidad desacoplada. Para representar el proceso plástico el modelo se basa en la teoría de la plasticidad. Este modelo puede escribirse también en forma de un modelo múltiple en disipación, es decir, con varios mecanismos de disipación a la vez; de tal manera, tales mecanismos se escriben igual que los modelos elastoplásticos clásicos.

El modelo de daño escalar viscoso unilateral y plasticidad desarrollado por Faria *et al*. (1998) fue formulado básicamente para el análisis sísmico de presas de gravedad. Los aspectos que considera este modelo en su formulación son: los diferentes umbrales de daño en tensión y en compresión que tiene el material, la recuperación de rigidez que existe en la descarga, la dependencia de la tasa de deformación y la aparición de deformaciones plásticas cuando se alcanzan diversos umbrales de esfuerzo.

El modelo de daño anisótropo y plasticidad acoplado desarrollado por Voyiadjis y Deliktas (2000) se trata de un modelo de plasticidad y de daño que puede tener el enfoque dependiente o independiente de la tasa de deformación. En su formulación se define una variable interna definida por un tensor de daño simétrico de segundo orden para representar el fenómeno de anisotropía. El modelo se basa en la hipótesis de la elasticidad desacoplada y en la de considerar un mecanismo de disipación compuesto por dos partes.

CAPÍTULO 3

Modelos constitutivos del acero

La teoría de la plasticidad es una generalización de los trabajos desarrollados por Tresca (1868), Saint-Venant (1870), Lévy (1870), von Mises (1913) y otros. Sus principales componentes son la función de fluencia, la regla de flujo y la ley de endurecimiento. En este trabajo de investigación se considera la teoría de pequeñas deformaciones. Se hace la suposición de que el estado de un volumen de material está totalmente descrito si se conocen la deformación total, la deformación plástica, y algunos parámetros adicionales que caracterizan el endurecimiento o ablandamiento en un vector κ . En este capítulo, se presenta una descripción general de la teoría de la plasticidad, incluyendo casos específicos como el modelo elastoplástico perfecto, modelo elastoplástico con endurecimiento y el modelo de adherencia.

Las ecuaciones básicas para el desarrollo de modelos basados en plasticidad son, la composición de la deformación total (ε), es decir

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.1)$$

La ley esfuerzo-deformación para la parte elástica

$$\sigma = D^e : \varepsilon^e \quad (3.2)$$

La condición de fluencia

$$f(\sigma, q) \leq 0 \quad (3.3)$$

La regla de flujo

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} g(\sigma, q) \quad (3.4)$$

La ley de endurecimiento

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} k(\sigma, \kappa) \quad (3.5)$$

Y la dependencia de las variables q que aparecen en las ecuaciones (3.3) y (3.4) sobre las variables de endurecimiento:

$$q = h(\kappa) \quad (3.6)$$

En las ecuaciones (3.1) a (3.6), ε es el tensor de deformaciones, ε^e es el tensor de deformación elástica, ε^p es el tensor de deformación plástica, σ es el tensor de esfuerzos, D^e es el tensor constitutivo elástico, f es la función de fluencia, g es una función que indica la dirección del flujo plástico, $\dot{\lambda}$ es la tasa del multiplicador plástico, κ son las variables de endurecimiento, y q son variables que ayudan a entender la estructura del modelo, que en una formulación termodinámica de plasticidad dichas variables emergen naturalmente como fuerzas termodinámicas conjugadas con las variables κ .

Aunque el punto que aparece encima de algunos parámetros indica variación respecto al tiempo, es importante aclarar que la teoría es independiente del tiempo. La función de fluencia denotada por f define el límite elástico en el espacio de esfuerzos, el cual está delimitado por la superficie de fluencia. Los estados correspondientes a $f < 0$ y $f = 0$ indican estado elástico y estado plástico, respectivamente. El estado dado por $f > 0$ es imposible. Debido a que las variables denotadas por q pueden crecer o decrecer, la superficie de fluencia puede evolucionar, es decir, se puede expandir, encoger, trasladarse e incluso cambiar su forma. El flujo plástico sólo puede presentarse si un estado de esfuerzos en un tiempo determinado se encuentra en el estado plástico, donde surge la condición

$$\dot{\lambda}f(\sigma, q) = 0 \quad (3.7)$$

De lo anterior se puede observar que si $f < 0$, entonces $\dot{\lambda} = 0$ y, por lo tanto, de acuerdo a las ecuaciones (3.4) y (3.5) la deformación plástica y las variables de endurecimiento permanecen constantes. Si $f = 0$, la ecuación (3.7) no restringe un valor para la tasa del multiplicador plástico; sin embargo, esta tasa no debe tener valor negativo porque la función g en la ecuación (3.4) especifica la dirección de la evolución, surgiendo de manera natural la condición adicional $\dot{\lambda} \geq 0$. Haciendo combinaciones algebraicas de las ecuaciones (3.3) y (3.7) con la condición anterior, se obtienen las condiciones de carga y descarga o condiciones de Kuhn-Tucker:

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}f = 0 \quad (3.8)$$

Cuando el flujo plástico está activo, la función de fluencia deberá ser igual a cero; debido a ello, la tasa de cambio deberá ser también cero. De esta consideración surge la llamada condición de consistencia

$$\dot{\lambda}\dot{f} = 0 \quad (3.9)$$

Para el caso en que $f < 0$, el multiplicador plástico, la deformación plástica y las variables de endurecimiento permanecen constantes y por tanto el problema lo gobierna la ley elástica; este estado se caracteriza por $\dot{f} = 0$ y $\dot{\lambda} > 0$. Para el caso en que $f = 0$, el flujo plástico puede continuar o el material se puede descargar elásticamente. Para el caso de descarga se tiene $\dot{\lambda} = 0$, y como el estado de esfuerzos posterior debe de ser elástico, entonces la superficie de

fluencia debe decrecer, lo que corresponde a $\dot{f} < 0$. El caso en el que aparecen $\dot{f} = 0$ y $\dot{\lambda} = 0$ se denomina carga neutra.

En los análisis empleando el método de los elementos finitos, generalmente se calculan los incrementos de los esfuerzos a partir de los incrementos de las deformaciones, por lo que se necesita conocer la matriz de rigideces elastoplástica. Para ello se parte del caso de carga plástica en el que la tasa del multiplicador plástico se puede determinar aplicando la regla de la cadena a la condición $\dot{f} = 0$ para obtener:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \quad (3.10)$$

Combinando las ecuaciones (3.1), (3.4) y (3.2), en su forma de variación respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\sigma} = D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} g) \quad (3.11)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.6) y sustituyéndola en la ecuación (3.5) resulta:

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial \kappa} \cdot \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \kappa} \cdot \kappa \quad (3.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.10) se obtiene una ecuación lineal para $\dot{\lambda}$, por tanto

$$\dot{\lambda} = \frac{f^\sigma : D^e : \dot{\varepsilon}}{f^\sigma : D^e : g - f^q \cdot H \cdot \kappa} \quad (3.13)$$

donde: $f^\sigma = \partial f / \partial \sigma$, $f^q = \partial f / \partial q$, y $H = \partial h / \partial \kappa$. Finalmente, sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.11) se obtiene la razón de cambio entre los esfuerzos y las deformaciones

$$\dot{\sigma} = \left(D^e - \frac{D^e : g \otimes f^\sigma : D^e}{f^\sigma : D^e : g - f^q \cdot H \cdot \kappa} \right) : \dot{\varepsilon} \quad (3.14)$$

El tensor dentro del paréntesis corresponde al tensor tangente plástico, el cual no es simétrico a menos que $g = f^\sigma$, que corresponde a una regla de flujo asociada; para esta condición la ecuación (3.4) toma la siguiente forma:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} \quad (3.15)$$

donde el término $\partial f / \partial \sigma$ es un gradiente normal a la superficie de fluencia por lo que a la ecuación anterior también se le conoce como regla de normalidad.

3.1 Comportamiento elastoplástico

Si se considera una barra sometida en tensión uniaxial cíclica como se muestra en la figura 3.1, se pueden observar:

- Se presenta un comportamiento elástico lineal hasta que el esfuerzo aplicado alcanza el valor del límite de fluencia del material σ_y .
- Una vez que el esfuerzo aplicado supera el valor de σ_y , el material presenta un comportamiento plástico, en el cual, el esfuerzo aplicado presenta variaciones pequeñas en su magnitud, mientras que las deformaciones crecen más rápido y ya no son recuperables en su totalidad. En el caso de un ciclo de carga y descarga (OAB) se puede deducir que la deformación en el punto A es:

$$\varepsilon_A = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) + \varepsilon_B$$

donde la deformación correspondiente a $(\varepsilon_A - \varepsilon_B)$ es la deformación elástica o recuperable, mientras que la deformación ε_B es la deformación plástica o no recuperable.

- Cuando se llega a un cierto nivel de deformación, se produce rotura en el material.

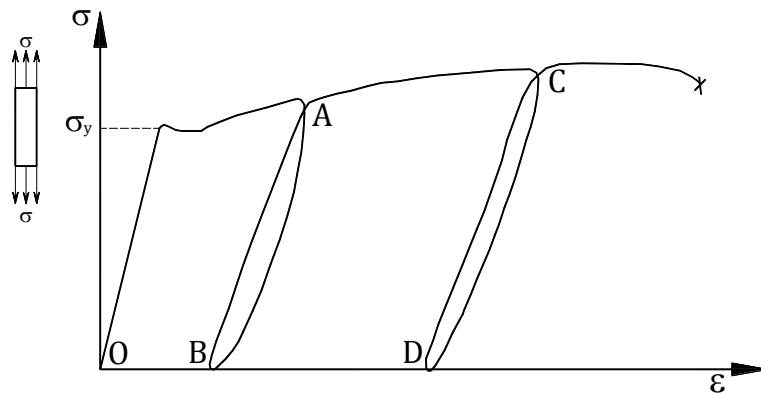


Figura 3.1 Barra sometida a esfuerzo de tensión uniaxial cíclico

La figura (3.2a) representa un comportamiento elastoplástico perfecto, el cual es una idealización de la figura 3.1 en la que se puede observar que para el punto P ubicado sobre la curva $\sigma - \varepsilon$, la deformación total se conforma de la suma de dos componentes: deformación recuperable o elástica y deformación permanente o plástica. En el comportamiento elastoplástico perfecto, las deformaciones crecen indefinidamente a esfuerzo constante cuyo valor corresponde al límite de fluencia del material. Para el caso en el que la deformación elástica fuera nula, el comportamiento sería plástico perfecto (fig. 3b), mientras que si una vez alcanzado el límite de fluencia el esfuerzo no se mantiene constante, si no que aumenta o disminuye conforme aumentan las deformaciones, se trata de un comportamiento

elastoplástico con endurecimiento o elastoplástico con ablandamiento, respectivamente (fig. 3c y 3d).

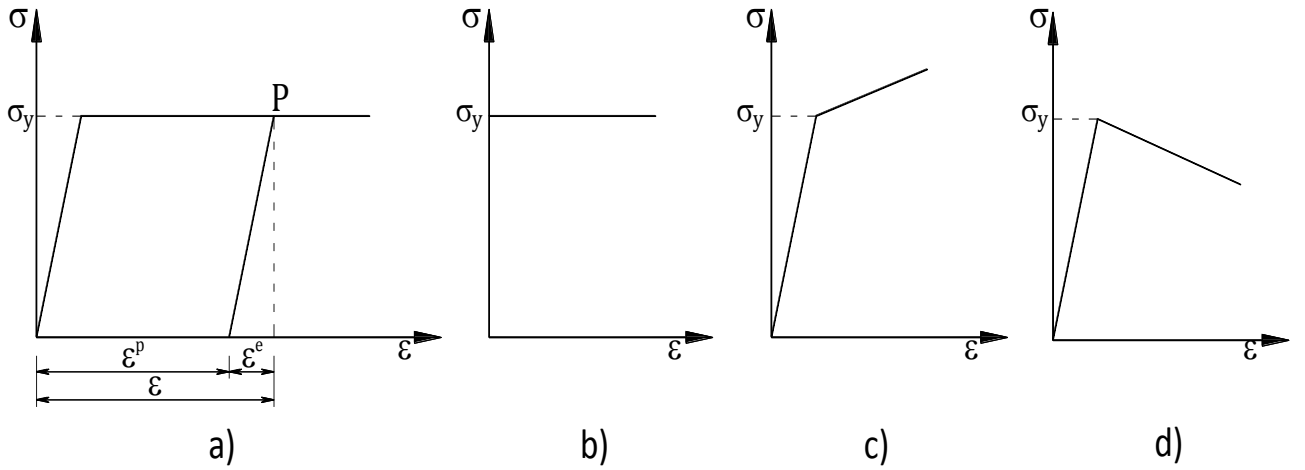


Figura 3.2 Curvas esfuerzo – deformación idealizadas: a) elastoplástico perfecto, b) plástico perfecto, c) elastoplástico con endurecimiento y d) elastoplástico con ablandamiento.

El modelo elastoplástico perfecto es un modelo donde no se emplea ninguna variable de endurecimiento ni de ablandamiento, por lo que las ecuaciones básicas (3.1) a (3.8) se reducen a:

Composición de la deformación total:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.16)$$

Ley esfuerzo-deformación para la parte elástica:

$$\sigma = D^e : \varepsilon^e \quad (3.17)$$

Regla de flujo:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} g(\sigma) \quad (3.18)$$

Condiciones de carga y descarga o condiciones de Kuhn-Tucker:

$$f(\sigma) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\sigma) = 0 \quad (3.19)$$

3.1.1 Condición de fluencia

La condición de fluencia define el estado de esfuerzos para el cual el material presenta flujo plástico. En materiales dúctiles, el inicio de la fluencia es independiente de la parte volumétrica del tensor de esfuerzo, por lo tanto, estos materiales presentan condiciones de fluencia que son independientes del invariante J_1 . Recordando que el tensor de esfuerzo σ se descompone en

una parte volumétrica o hidrostática (σ_V) que produce únicamente esfuerzos de tensión pura o compresión pura contribuyendo solo a producir cambios de volumen, y en otra parte desviadora (s) que representa esfuerzos de corte puro contribuyendo solo a la deformación plástica, se tiene:

$$\sigma = \sigma_V \delta + s \quad (3.20)$$

donde $\sigma_V = \sigma_{kk}/3$ y δ es el tensor de segundo orden conocido como delta de Kronecker. De manera similar, para la deformación se tiene

$$\varepsilon = \varepsilon_V \delta + e \quad (3.21)$$

donde $\varepsilon_V = \varepsilon_{kk}/3$ es la parte volumétrica o hidrostática, mientras que e es la parte desviadora. La ley constitutiva para un material isótropo y elástico viene dada por

$$\sigma = D^e : \varepsilon \quad (3.22)$$

Se pueden establecer básicamente dos relaciones entre las componentes volumétricas y desviadoras tanto del tensor de esfuerzo como del tensor deformación, resultando, *i.e.*

$$\sigma_V = 3K\varepsilon_V \quad (3.23)$$

$$s = 2Ge \quad (3.24)$$

En la ecuación (3.23) K es el módulo de compresibilidad y en la ecuación (3.24) G es el módulo elástico de corte. Debido a que en los materiales isotrópicos no se tienen efectos de orientación, la condición de fluencia debe depender únicamente de los invariantes del tensor de esfuerzo; recordando, se tienen los tres invariantes definidos por:

$$J_1 = \sigma : \delta = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{oct} = 3\sigma_V \quad (3.25)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s : s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \quad (3.26)$$

$$J_3 = \det|s| = \det|s_{ij}| = s_1 s_2 s_3 = (\sigma_1 - \sigma_V)(\sigma_2 - \sigma_V)(\sigma_3 - \sigma_V) \quad (3.27)$$

donde σ_{oct} es el esfuerzo octaédrico normal, mientras que, τ_{oct} es el esfuerzo octaédrico tangencial.

La condición de fluencia de von Mises (1913) es un ejemplo de un modelo independiente del invariante J_1 . Matemáticamente se expresa como:

$$f(J_2) \equiv \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0 \quad (3.28)$$

donde τ_0 es un parámetro del material. Cabe mencionar que la teoría basada en la condición de fluencia de von Mises a menudo se conoce con el nombre de modelo de plasticidad J_2 .

En general, las condiciones de fluencia se presentan de una manera gráfica en el espacio de esfuerzos principales. El eje hidrostático es aquella línea donde los tres esfuerzos principales son iguales. Los planos que son perpendiculares al eje hidrostático se llaman planos desviadores. Las secciones desviadoras resultan de la intersección de la superficie de fluencia con los planos desviadores, mientras que, los meridianos, resultan de la intersección de la superficie de fluencia con planos que contengan el eje hidrostático.

La intersección de la superficie de fluencia de von Mises con los ejes coordenados σ_1 y σ_2 es una elipse como se observa en la figura (3.3a), cuya ecuación se obtiene al sustituir el valor de $\sigma_3 = 0$ en la ecuación (3.26), resultando así, $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$. La superficie de fluencia que corresponde al criterio de von Mises es un cilindro rotacionalmente simétrico respecto al eje hidrostático. Los meridianos (fig. 3.3b), para este caso, resultan ser líneas paralelas al eje hidrostático y las secciones desviadoras son círculos de radios constantes (fig. 3.3c).

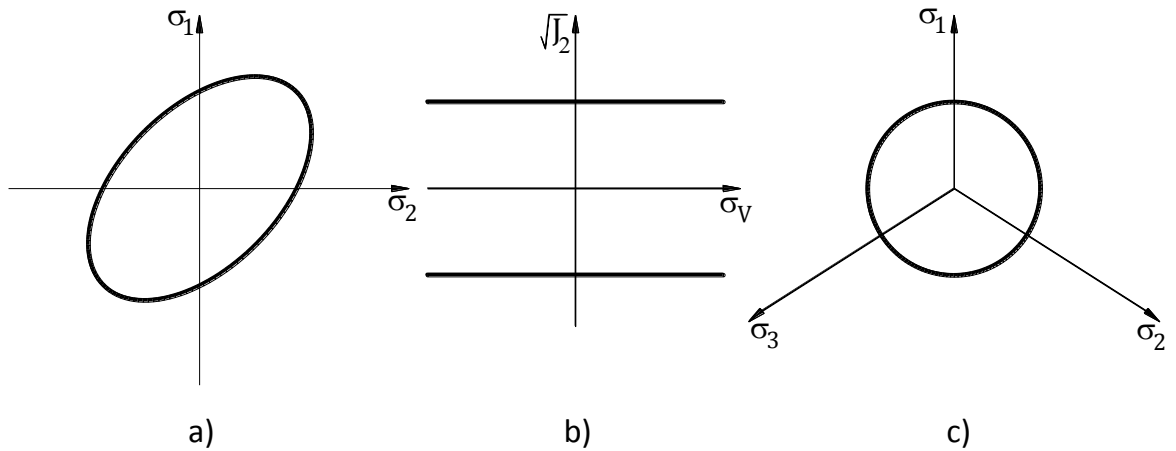


Figura 3.3 Superficie de fluencia de von Mises: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora

Los valores del esfuerzo de fluencia uniaxial σ_0 se obtienen gráficamente de las intersecciones del cilindro con los ejes coordenados. Para un esfuerzo uniaxial se tiene que $J_2 = \sigma_1^2/3$, por lo que el esfuerzo de fluencia uniaxial y el esfuerzo de fluencia puro en cortante τ_0 se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_0 = \tau_0\sqrt{3} \quad (3.29)$$

La condición de fluencia propuesta por Tresca (1868), se basa en que el material comienza a fluir cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor umbral τ_0 que se expresa como:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_0^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_0^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4\tau_0^2] \quad (3.30)$$

Debido a que existen seis valores máximos para la magnitud del esfuerzo cortante, esta condición requiere que una de las siguientes ecuaciones se satisfaga:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \tau_0 \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm \tau_0 \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \tau_0 \quad (3.31)$$

Cabe mencionar que si los esfuerzos principales se ordenan de tal manera que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, esta condición de fluencia toma la forma $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_0$, ya que el esfuerzo cortante máximo será $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Si se expresa el esfuerzo cortante de fluencia en términos del esfuerzo de fluencia uniaxial, se obtiene:

$$\sigma_0 = 2\tau_0 \quad (3.32)$$

Programas experimentales han demostrado que la mayoría de los metales se encuentran en medio de los valores dados por las ecuaciones (3.29) y (3.32), aunque generalmente más cerca de la condición de fluencia de von Mises (ec. 3.29). Un criterio intermedio entre los dos mencionados anteriormente fue desarrollado por Edelman y Drucker (Lemaitre y Chaboche, 1990), el cual se caracteriza por ser función de los invariantes J_2 y J_3 .

En condiciones de esfuerzo plano, las seis ecuaciones (3.31) representan líneas rectas, las cuales pasan a través de los puntos $\pm\sigma_0$ ubicados en los ejes coordenados, formándose así un hexágono como se muestra en la figura (3.4a). Los meridianos (fig. 3.4b) para este caso resultan ser líneas paralelas al eje hidrostático y la sección desviadora característica de esta condición se representa mediante un hexágono regular (fig. 3.4c), donde cada lado corresponde a cada plano de máximo esfuerzo cortante.

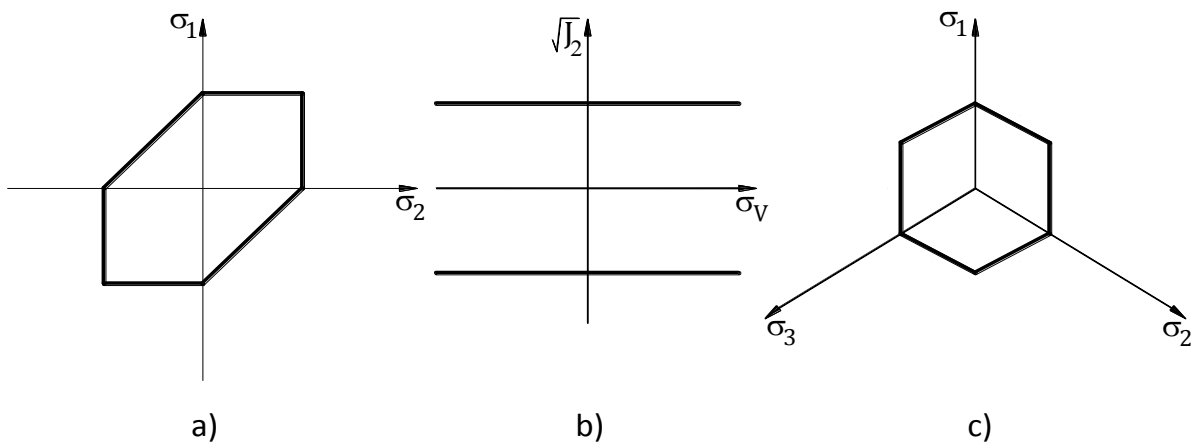


Figura 3.4 Superficie de fluencia de Tresca: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora

Si se considera que el esfuerzo de fluencia uniaxial σ_0 es el mismo tanto para la condición de fluencia de von Mises como para la de Tresca. Para el esfuerzo plano (fig.3.5a), el hexágono de Tresca está inscrito en la elipse de von Mises, por lo que se puede decir que en el espacio de esfuerzos principales, la condición de Tresca se representa por medio de un prisma hexagonal inscrito en el cilindro de von Mises. Los meridianos de ambas condiciones se observan en la figura (3.5b). En el plano desviador la condición de Tresca se representa mediante un hexágono regular inscrito en el círculo de von Mises.

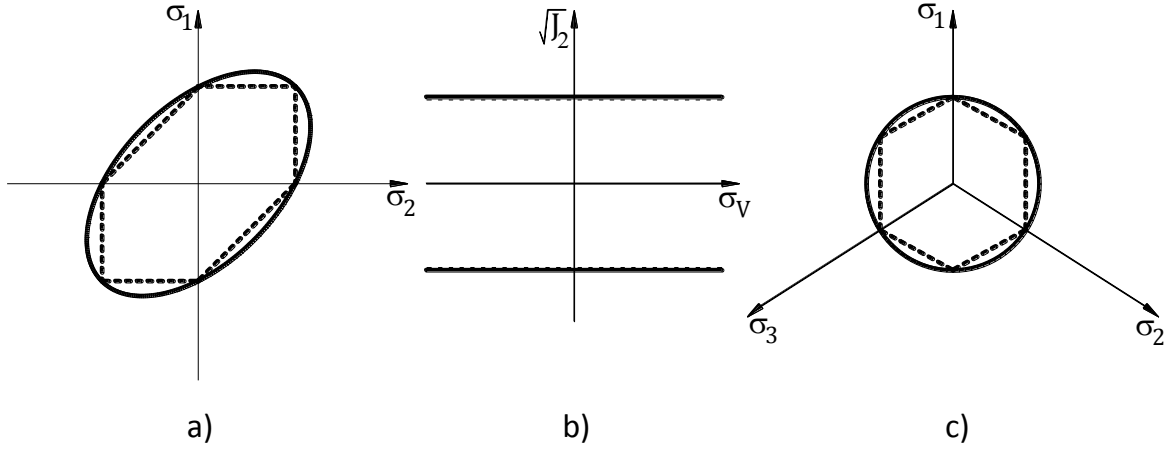


Figura 3.5 Superficies de fluencia de von Mises y Tresca: a) representación en esfuerzo plano, b) meridianos y c) sección desviadora

Como se ha comentado, la fluencia de materiales dúctiles tales como los metales generalmente se considera como independiente de la presión (independientes del invariante J_1), y se describe ya sea por el criterio de von Mises o de Tresca. Sin embargo, la existencia de esfuerzos hidrostáticos considerables puede propiciar la nucleación y propagación de vacíos, los cuales a nivel macroscópico se perciben como un incremento de volumen plástico. El modelo desarrollado por Gurson (1977), es el modelo más popular para considerar los efectos de la porosidad del material sobre la superficie de fluencia. La función de fluencia de Gurson basada en un análisis micro mecánico es:

$$f(J_1, J_2) \equiv \frac{3J_2}{\sigma_0^2} + 2p \cosh\left(\frac{J_1}{2\sigma_0}\right) - 1 - p^2 = 0 \quad (3.33)$$

donde σ_0 es el esfuerzo de fluencia uniaxial del material base, es decir, sin poros, p es la fracción de volumen de poros. Si $p = 0$, este criterio es equivalente al de von Mises (ec. 3.29) con $\tau_0 \equiv \sigma_0/3$.

Tvergaard (1981, 1982) propuso afectar la porosidad p de la ecuación (3.33) por un factor correctivo de $q = 1.5$ y así tener en cuenta una distribución periódica de vacíos en el material y

su interacción. Tvergaard y Needleman (1984) utilizaron el factor p^* en lugar de p , para mejorar la predicción de la falla final debido a la coalescencia de los vacíos, es decir:

$$p^* = \begin{cases} p & \text{si } p \leq p_c \\ p_c + \frac{p_u^* - p_c}{p_F - p_c} (p - p_c) & \text{si } p \geq p_c \end{cases} \quad (3.34)$$

donde p_c es la porosidad a la cual comienza el fenómeno de coalescencia (*i.e.* $p_c = 0.15$), p_F es la porosidad a la cual el esfuerzo que lleva la capacidad se desvanece completamente (*i.e.* $p_F = 0.25$), y $p_u^* = 1/q = 2/3$. Con estas definiciones, resulta la siguiente condición de fluencia conocida como modelo de Gurson modificado:

$$f(J_1, J_2) \equiv \frac{3J_2}{\sigma_0^2} + 3p^* \cosh\left(\frac{J_1}{2\sigma_0}\right) - 1 - (1.5p^*)^2 = 0 \quad (3.35)$$

3.1.2 Regla de flujo: flujo asociado

Durante el flujo plástico, el estado de esfuerzo alcanza la superficie de fluencia y permanece sobre ella, satisfaciéndose así la condición de fluencia dada por $f(\sigma) = 0$. La condición de fluencia sólo es una ecuación auxiliar para el cálculo de la deformación plástica, por lo que para describir la evolución del flujo plástico es necesaria una ecuación adicional conocida con el nombre de regla de flujo. Esta regla de flujo debe obtenerse de pruebas experimentales, siendo su forma general la dada en la ecuación (3.4). Desde una perspectiva teórica, es importante trabajar con una regla de flujo que conserve la validez del *principio de máxima disipación plástica*, el cual establece que si $\dot{\epsilon}_p$ es una tasa de deformación plástica dada, entre todos los estados de esfuerzo σ^* que satisfacen la condición de fluencia, la potencia $\sigma^*: \dot{\epsilon}_p$ es maximizada por el esfuerzo real denotado por σ , es decir:

$$\sigma: \dot{\epsilon}_p = \max_{f(\sigma^*) \leq 0} (\sigma^*: \dot{\epsilon}_p) \quad (3.36)$$

La ecuación anterior indica que la proyección de los estados de esfuerzo admisibles en la dirección de la tasa de deformación plástica son maximizados por el estado real de esfuerzo. La ecuación (3.36) sólo se cumple si se satisfacen los dos requerimientos siguientes: que el dominio elástico sea convexo y que la dirección de la tasa de deformación plástica sea normal a la superficie de fluencia. A estos requerimientos se les conoce con el nombre de convexidad y normalidad, respectivamente. La figura (3.6a) muestra la violación al principio de máxima disipación plástica debido a la falta de normalidad, es decir, la dirección del flujo no es normal a la superficie de fluencia, en tal figura también se observa que el vector σ^* tiene una mayor proyección sobre la dirección del flujo plástico que el esfuerzo real σ . En la figura (3.6b) se

muestra que el dominio elástico no es convexo. En la figura (3.6c) se muestra el cumplimiento de los dos requerimientos mencionados, y en la figura (3.6d) se muestra un ejemplo donde la dirección del flujo plástico en una esquina de la superficie de fluencia no está definida únicamente por la condición de normalidad, en este caso, el principio de máxima disipación plástica se satisface para cualquier dirección del flujo dentro del abanico.

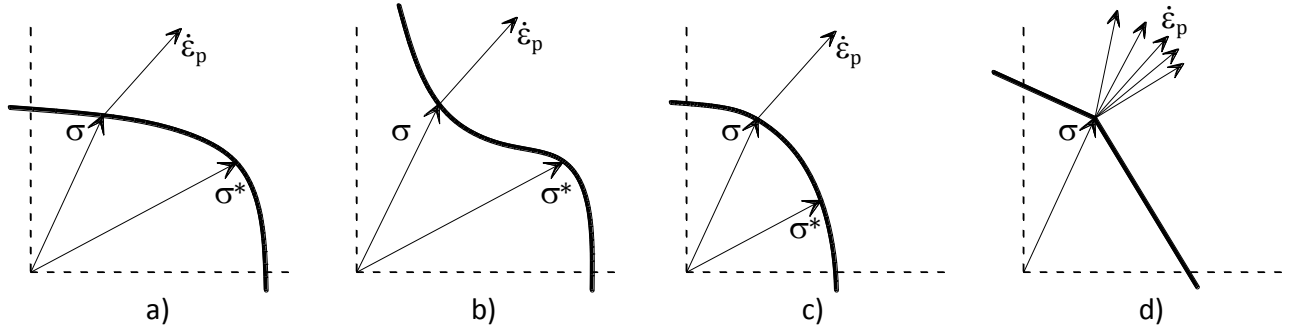


Figura 3.6 Convexidad y normalidad

La superficie de fluencia en el espacio de esfuerzo es una representación gráfica de la ecuación $f(\sigma) = 0$ y la dirección normal a ésta se determina por el gradiente de $\partial f / \partial \sigma$. Lo anterior conduce a la regla de flujo conocida como regla de flujo asociada o regla de normalidad indicada en la ecuación (3.37). El término “asociada” indica que la regla está acoplada a la condición de fluencia.

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.37)$$

La variable λ es un multiplicador escalar conocido como multiplicador plástico, el cual controla la magnitud de la deformación plástica. La forma incremental de la ecuación (3.37) es:

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\lambda f^\sigma \quad (3.38)$$

La mayoría de los metales presentan un comportamiento que puede describirse adecuadamente mediante el empleo de una regla de flujo asociada.

3.2 Comportamiento plástico con endurecimiento

En el modelo elastoplástico perfecto se considera que cuando el flujo plástico está activo, el estado de esfuerzos puede moverse a lo largo de la superficie de fluencia, pero ésta no cambia. Sin embargo, en la realidad, la microestructura del material cambia conforme el flujo plástico continúa, lo que resulta en un cambio de las propiedades que se pueden observar en la macroescala. Bajo carga uniaxial, los esfuerzos transmitidos por un material fluyendo pueden aumentar o disminuir. Un incremento del esfuerzo de fluencia se conoce como endurecimiento,

mientras que a un decremento del mismo se le conoce como ablandamiento. Es importante mencionar que muchos materiales inicialmente endurecen y después ablandan.

Durante el endurecimiento/ablandamiento, el dominio elástico se somete a una cierta evolución. En el caso de un material virgen, su dominio elástico está delimitado por la superficie de fluencia inicial conocida también como envolvente límite elástica. Debido a los cambios en la microestructura que induce el flujo plástico en un material, el dominio elástico cambia su forma o posición, o ambas. El límite intermedio del dominio elástico es conocido como superficie de carga.

3.2.1 Endurecimiento isotrópico

Con el objeto de describir la evolución de la superficie de carga, es necesario el empleo de una o varias variables que logren caracterizar el fenómeno de endurecimiento. Odqvist (1933) desarrolló un modelo que incluía el *endurecimiento isotrópico* (fig. 3.7), en el cual la superficie de fluencia se puede expandir o contraer, este enfoque es el más simple, pues considera una familia de superficies de carga de un parámetro que son todas similares y afines con respecto al origen. Tales superficies de carga pueden derivarse de la forma básica de la función de fluencia, en la cual se usan diferentes valores de esfuerzo de fluencia. Cualquier criterio de fluencia originalmente formulado en la forma:

$$f(\sigma) \equiv F(\sigma) - \sigma_0 = 0 \quad (3.39)$$

Puede ser reformulado como:

$$f(\sigma, \sigma_Y) \equiv F(\sigma) - \sigma_Y = 0 \quad (3.40)$$

donde σ_0 es un esfuerzo de fluencia constante y σ_Y es el esfuerzo de fluencia actual inicialmente igual a σ_0 .

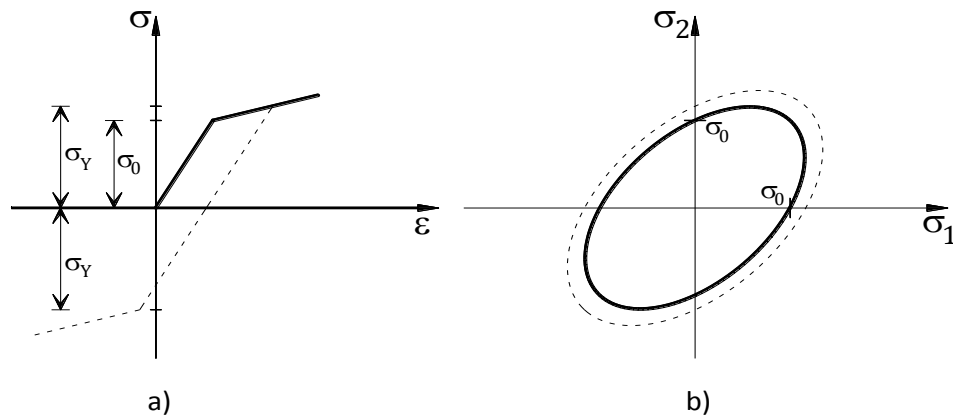


Figura 3.7 Endurecimiento isotrópico: a) curva esfuerzo-deformación y b) evolución de la superficie de fluencia en el plano biaxial de esfuerzo.

La evolución del esfuerzo de fluencia durante el flujo plástico debe describirse por una ecuación adicional conocida como *ley de endurecimiento*. Las leyes de endurecimiento bajo carga monotónica uniaxial pueden presentar una forma en la que dependan explícitamente del esfuerzo de fluencia en la deformación plástica; dichas leyes reciben el nombre de *endurecimiento por deformación*, es decir:

$$\sigma_Y = h(\varepsilon_{11}^p) \quad (3.41)$$

donde ε_{11}^p es la parte plástica de la deformación normal ε_{11} en la dirección del esfuerzo aplicado σ_{11} . La función h se puede obtener de la curva esfuerzo-deformación ante carga monotónica uniaxial, siendo su derivada:

$$h'(\varepsilon_{11}^p) \equiv H(\varepsilon_{11}^p) \quad (3.42)$$

donde $H(\varepsilon_{11}^p)$ es el módulo plástico. La ley de endurecimiento más simple es la lineal que se le atribuye a Prager, en la que el módulo plástico es constante, $H(\varepsilon_{11}^p) = H$, la ley lineal tiene la forma:

$$\sigma_Y = \sigma_0 + H(\varepsilon_{11}^p) \quad (3.43)$$

Si en la ecuación (3.43), el valor del módulo plástico es positivo, se está ante un caso de endurecimiento. Para un módulo plástico igual a cero corresponde al caso de plasticidad perfecta, y para el caso en el que el valor del módulo plástico sea negativo se presenta un ablandamiento.

En general, ante un caso de carga multiaxial, la deformación plástica ε_p es un tensor de segundo orden y la ley de endurecimiento descrita por la ecuación (3.41) se puede extender a este caso si se introduce una medida escalar que refleje la cantidad de cambio en la microestructura del material. A fin de caracterizar el endurecimiento por deformación, se introduce la hipótesis de *deformación plástica acumulativa* también llamada *deformación plástica efectiva o equivalente*, $\bar{\varepsilon}_p$, cuya variación respecto al tiempo es:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p \quad (3.44)$$

El factor $\sqrt{2/3}$ se escoge de tal manera que bajo carga uniaxial monotónica, $\dot{\bar{\varepsilon}}_p$ coincidiría con la componente $\dot{\varepsilon}_{11}^p$ de $\dot{\varepsilon}_p$, siempre que el flujo plástico sea isocórico (puramente desviador), i.e., no hay cambio plástico de volumen. Al integrar la ecuación (3.44) se obtiene:

$$\bar{\varepsilon}_p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\varepsilon}_p(\tau)\| d\tau \quad (3.45)$$

donde el tiempo t puede ser algún parámetro que incrementa monotónicamente controlando el proceso de carga.

Una hipótesis alternativa a la hipótesis del endurecimiento por deformación (la que supone que el esfuerzo de fluencia depende de la deformación plástica acumulativa), es la llamada hipótesis del trabajo por deformación que supone que el esfuerzo de fluencia depende del trabajo plástico, es decir:

$$W_p(t) = \int_0^t \sigma(\tau) : \dot{\varepsilon}_p(\tau) d\tau \quad (3.46)$$

Para elegir una de las dos hipótesis anteriores se necesitan, para ambas, resultados de experimentos con carga multiaxial; por ejemplo, no existe manera de poder determinar cuál es mejor si sólo se tienen los resultados de un experimento uniaxial. Las dos hipótesis son ampliamente usadas ya que incluso en muchas situaciones de carga multiaxial arrojan resultados similares. Por ejemplo, en el caso del modelo de plasticidad J_2 las dos son completamente equivalentes (después de una apropiada transformación de la función de endurecimiento h).

Para cubrir ambas hipótesis en una sola variable, se introduce la *variable de endurecimiento* denotada por κ ; es decir, la variable κ puede ser la deformación plástica acumulativa (endurecimiento por deformación) o puede ser el trabajo plástico re-escalado (trabajo por deformación). Es conveniente aunque no importante *re escalar* el trabajo plástico de tal manera que tenga la dimensión de la deformación y que, bajo tensión uniaxial, corresponda a ε_{11}^p . Lo anterior se puede lograr al definir la variable del trabajo por deformación en la siguiente forma:

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{h(\kappa)} \sigma : \dot{\varepsilon}_p \quad (3.47)$$

Por lo que la ecuación (3.41) se describe de la siguiente forma:

$$\sigma_Y = h(\kappa) \quad (3.48)$$

Es importante mencionar que durante el flujo plástico bajo tensión uniaxial, se tiene:

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p = \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11}^p = \sigma_Y \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (3.49)$$

Y por lo tanto, al combinar la ecuación (3.47) con la ecuación (3.48) se obtiene:

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (3.50)$$

Por consiguiente, la variable del endurecimiento por deformación es idéntica a la variable del trabajo por deformación en condiciones de esfuerzo uniaxial, y la misma función de endurecimiento h puede utilizarse para cualquier tipo de endurecimiento.

3.2.2 Endurecimiento cinemático

En el endurecimiento isotrópico se emplea solo un parámetro para describir el fenómeno; sin embargo, se necesitan leyes de endurecimiento más complicadas para abarcar el caso por ejemplo de carga cíclica (carga y descarga). Una regla de endurecimiento alternativa es aquella que considera que la superficie de carga no se expande, si no que se mueve como un cuerpo rígido dentro del espacio de esfuerzos (fig 3.8b), a esta regla se le conoce como *endurecimiento cinemático*. El empleo de este tipo de endurecimiento es necesario para modelar el *efecto Bauschinger*. Bauschinger (1881) describió este efecto, al observar que algunos metales que se someten a cargas de tensión hasta producir deformación plástica, al hacer la inversión de la carga y aplicar carga en compresión, fluyen antes de que alcancen el límite elástico en compresión, incluso si los límites de fluencia en tensión y en compresión son los mismos. En otras palabras, después de la anterior fluencia en tensión, la fluencia en compresión puede empezar a un nivel de esfuerzo menor que el esfuerzo de fluencia inicial, esto se observa en la figura (3.8a).

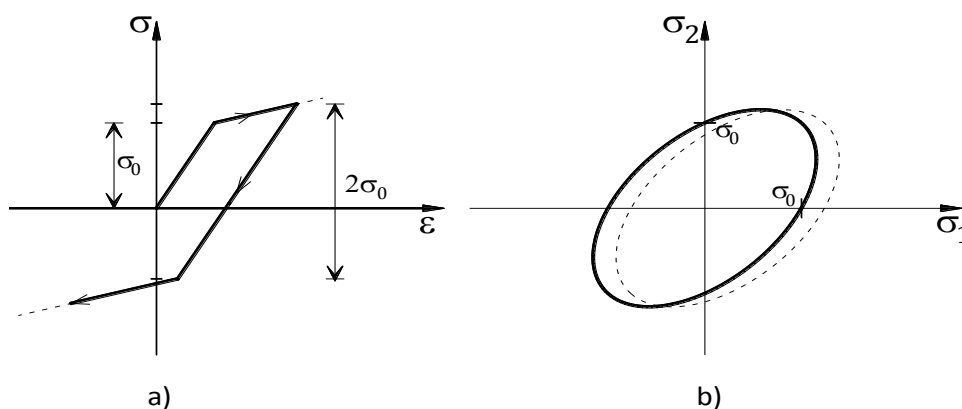


Figura 3.8 Endurecimiento cinemático: a) curva esfuerzo-deformación uniaxial y b) evolución de la superficie de fluencia en el plano biaxial de esfuerzo.

El endurecimiento cinemático propicia una traslación de la superficie de carga, que puede ser por ejemplo un desplazamiento de la superficie de fluencia inicial respecto al origen. Si la superficie de fluencia inicial se describe según la ecuación (3.39), entonces la familia de superficies desplazadas se describen como:

$$f(\sigma, \alpha) \equiv F(\sigma - \alpha) - \sigma_0 = 0 \quad (3.51)$$

En la que α es el llamado *esfuerzo de retorno* y que representa el centro del dominio elástico desplazado y actúa como una variable tensorial de endurecimiento. Melan (1938) propuso una ley de endurecimiento cinemático para gobernar la evolución del esfuerzo de retorno, la cual tiene la forma:

$$\dot{\alpha} = \bar{H}_K \dot{\epsilon}_p \quad (3.52)$$

El factor \bar{H}_K es proporcional al módulo plástico. Dado que la ley de endurecimiento lineal se le atribuye a Prager (1955), a la ecuación (3.52) se le identifica como *regla de endurecimiento de Melan-Prager* ya que es una regla de endurecimiento cinemático lineal. Algunas de las generalizaciones a la regla de Melan-Prager son debidas a Backhaus (1968) quien consideró al factor \bar{H}_K como una variable que depende de la deformación plástica acumulativa y Lehmann (1972) quien reemplazó el factor \bar{H}_K por el tensor $\bar{\mathbf{H}}_K$.

Ziegler (1959) propuso una modificación a la regla de endurecimiento de Melan-Prager, al observar que si la ecuación original (3.52) se reduce a un subespacio del espacio de esfuerzos, la superficie de fluencia no siempre se mueve en la dirección de su normal en el punto de esfuerzos actual. También observó que la superficie de fluencia de von Mises siguiendo la regla de Melan-Prager siempre se mueve en la dirección del vector que conecta el centro con el punto de esfuerzos actual, y que esta propiedad se mantiene en cualquier subespacio del espacio de esfuerzos. Como consecuencia de lo anterior, Ziegler sugirió la siguiente ley de endurecimiento cinemático:

$$\dot{\alpha} = \dot{\mu}(\sigma - \alpha) \quad (3.53)$$

donde $\dot{\mu}$ es un multiplicador que se determina de una adecuada condición adicional. La ecuación (3.53) define la dirección en la cual se mueve la superficie de fluencia más no la velocidad a lo que lo hace. La condición de consistencia descrita por la ecuación (3.54) en la que se sustituye la ley constitutiva elástica esfuerzo-deformación, la regla de flujo y la ley de endurecimiento, proporciona solo una ecuación para dos incógnitas (ec. 3.55), el multiplicador plástico ($\dot{\lambda}$) y el multiplicador de la ley de endurecimiento ($\dot{\mu}$).

$$f^\sigma : \dot{\sigma} - f^\sigma : \dot{\alpha} = 0 \quad (3.54)$$

$$f^\sigma : D^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} f^\sigma) - \dot{\mu} f^\sigma : (\sigma - \alpha) = 0 \quad (3.55)$$

Para establecer una relación entre $\dot{\sigma}$ y $\dot{\epsilon}_p$ se postula la condición de que la proyección de $\dot{\sigma}$ sobre la dirección de la normal a la superficie de fluencia es proporcional a la proyección de $\dot{\epsilon}_p$, surgiendo así la siguiente ecuación que también satisface la regla de endurecimiento de Melan-Prager

$$\dot{\sigma} : f^\sigma = \bar{H}_K \dot{\epsilon}_p : f^\sigma \quad (3.56)$$

Por lo tanto, el factor \bar{H}_K tiene el mismo significado que en la regla de Melan-Prager.

Al usar de nueva cuenta la ley constitutiva elástica esfuerzo-deformación y la regla de flujo, se obtiene la siguiente relación que tiene una sola incógnita

$$f^\sigma : D^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} f^\sigma) = \bar{H}_K \dot{\lambda} f^\sigma : f^\sigma \quad (3.57)$$

De la que se obtiene

$$\dot{\lambda} = \frac{f^\sigma : D^e : \dot{\varepsilon}}{f^\sigma : D^e : f^\sigma + \bar{H}_K f^\sigma : f^\sigma} \quad (3.58)$$

Sustituyendo la ecuación (3.58) en la (3.55) finalmente se obtiene una ecuación para el cálculo de $\dot{\mu}$

$$\dot{\mu} = \bar{H}_K \frac{f^\sigma : f^\sigma}{f^\sigma : (\sigma - \alpha)} \frac{f^\sigma : D^e : \dot{\varepsilon}}{f^\sigma : D^e : f^\sigma + \bar{H}_K f^\sigma : f^\sigma} \quad (3.59)$$

La regla de Ziegler lleva a los mismos resultados que la regla de Melan-Prager para el caso de la condición de von Mises. Sin embargo, para otras condiciones de fluencia la predicción del modelo depende de la forma de la regla de endurecimiento.

3.2.3 Endurecimiento mixto

Los modelos de endurecimiento mixtos están compuestos por una combinación del endurecimiento isotrópico y del endurecimiento cinemático, lo que resulta en una modificación de la superficie de carga por la simultánea expansión o contracción y translación. La condición de fluencia para este caso está definida por:

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_Y) \equiv F(\sigma - \alpha) - \sigma_Y = 0 \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) considera tanto el endurecimiento isotrópico como el endurecimiento lineal cinemático considerándolos como casos particulares.

A manera de ejemplo, se presenta la plasticidad asociada de von Mises con una combinación de endurecimiento isotrópico lineal y endurecimiento cinemático lineal. La condición de fluencia para estas condiciones es:

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_Y) \equiv \sqrt{3J_2(\sigma - \alpha)} - \sigma_Y = 0 \quad (3.61)$$

La forma equivalente de la ecuación anterior se presenta como:

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_Y) \equiv \frac{1}{2}(s - \alpha) : (s - \alpha) - \frac{\sigma_Y^2}{3} = 0 \quad (3.62)$$

donde $f = s - \alpha$ es el gradiente de la función de fluencia con respecto al tensor de esfuerzo, por lo que la regla de flujo asociada es:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda}(s - \alpha) \quad (3.63)$$

La ley de endurecimiento isotrópico lineal se puede describir como:

$$\sigma_Y = \sigma_0 + H_I \bar{\varepsilon}_p \quad (3.64)$$

En la que H_I es constante y representa el módulo de endurecimiento isotrópico, $\bar{\varepsilon}_p$ es una variable de endurecimiento que tiene por significado la deformación plástica acumulada definida por:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \parallel \dot{\varepsilon}_p \parallel \quad (3.65)$$

De acuerdo a la regla de Melan-Prager (regla de endurecimiento cinemático lineal), la cual se caracteriza por una dependencia lineal del esfuerzo de retorno en la deformación plástica, se puede decir:

$$\alpha = \frac{2}{3} H_K \varepsilon_p \quad (3.66)$$

donde H_K es constante y representa el módulo de endurecimiento cinemático. Los factores $\sqrt{2/3}$ y $2/3$ proporciona a los módulos de endurecimiento H_I y H_K con su significado físico usual bajo esfuerzo uniaxial. Las ecuaciones anteriores se pueden transformar al formato general dados en las ecuaciones (3.5) y (3.6) si se establece que $\kappa = \{\bar{\varepsilon}_p, \varepsilon_p\}^T$ y $q = \{\sigma_Y, \alpha\}^T$. Con lo anterior, la forma particular de la ecuación (3.5) son las siguientes ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{\varepsilon}}_p = \\ \dot{\varepsilon}_p = \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \parallel s - \frac{2}{3} H_K \varepsilon_p \parallel \\ s - \frac{2}{3} H_K \varepsilon_p \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

La ecuación (3.6) se representa por las ecuaciones (3.64) y (3.66).

3.2.4 Endurecimiento cinemático no lineal

Algunas veces, para realizar un modelo realista del comportamiento de algunos materiales es necesario el empleo de leyes de endurecimiento no lineales. Por ejemplo, para el endurecimiento isotrópico la incorporación del efecto no lineal puede introducirse fácilmente a través de la función $h(\kappa)$, pero para el endurecimiento cinemático no es tan simple. En algunas ocasiones se opta por reemplazar la constante \bar{H}_K de la ecuación (3.52) por una función acumulativa de deformación plástica; sin embargo, sólo en casos particulares proporciona curvas realistas de los diagramas esfuerzo-deformación ante carga cíclica.

Armstrong y Frederick (1966) propusieron una ley no lineal de endurecimiento cinemático, en la cual se enriquece la regla de Melan-Prager debido al empleo de un término proporcional al esfuerzo de retorno actual multiplicado por la norma de $\dot{\varepsilon}_p$. De acuerdo a la regla de Armstrong y Frederick, la evolución del esfuerzo de retorno es:

$$\dot{\alpha} = \bar{H}_K \dot{\varepsilon}_p - \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}_p\| \alpha \quad (3.68)$$

donde \bar{H}_K y γ son parámetros del material.

Es de interés mencionar que en el inicio de la fluencia el valor del esfuerzo de retorno es cero y por lo tanto la ecuación (3.68) proporciona el mismo resultado que la ley de endurecimiento cinemático lineal (Melan-Prager).

En resumen, el conjunto de ecuaciones que definen el modelo constitutivo del acero de refuerzo que se utiliza en este trabajo está dado por:

- a) Energía libre $\Psi(\varepsilon^e, r) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbb{C}^e : \varepsilon^e + \Psi^p(\alpha)$
- b) Ecuación constitutiva $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C}^e : (\varepsilon - \varepsilon^p)$
- c) Regla de flujo $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
- d) Ley de evolución de daño $\alpha = -\partial_{\sigma_Y} H(\sigma_Y) = \dot{\lambda}; \quad \alpha \in [0, \infty]$
- e) Criterio de fluencia $f(\sigma, \sigma_Y) \equiv F(\sigma) - \sigma_Y = 0$
- f) Regla de endurecimiento $\sigma_Y = h(\varepsilon^p) \rightarrow h(\varepsilon^p) = \frac{\partial \Psi^p(\alpha)}{\partial \alpha}$
 $h'(\varepsilon^p) \equiv H(\varepsilon^p) \rightarrow H(\varepsilon^p) = \sigma'_Y = \frac{\partial^2 (\Psi^p(\alpha))}{\partial \alpha^2}$
- g) Condiciones de carga y descarga $f(\sigma) \leq 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad \dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

3.3 Adherencia entre el acero y el concreto

El modelado del fenómeno de adherencia en elementos de concreto reforzado generalmente se agrupa en dos grandes enfoques: enfoque microscópico y enfoque macroscópico. En el primero se aplica una relación adherencia-deslizamiento de tipo local. En el segundo, se hace un análisis del comportamiento de la adherencia a través de la respuesta del elemento a nivel global. Desde un punto de vista de modelado constitutivo para el análisis estructural del concreto reforzado, el fenómeno de adherencia puede estudiarse en cuatro diferentes escalas.

1. Acción de apoyo de las estrías de la varilla en el concreto circundante: esta escala es totalmente a nivel microscópico. El dominio que abarca este nivel de modelado queda delimitado por el espacio existente entre dos grietas secundarias.
2. Relación adherencia-deslizamiento local: el dominio para esta escala queda delimitado por el espacio que existe entre dos grietas principales en cuyo espacio existen diversas grietas secundarias.
3. Modelo macroscópico promediado espacialmente: el dominio que abarca este modelado queda delimitado por un espacio donde existan varias grietas principales.
4. Modelo macroscópico basado en el elemento: esta escala de modelado es totalmente a nivel macroscópico, es decir, se estudia el elemento completo.

Las cuatro escalas mencionadas anteriormente se muestran gráficamente en la figura 3.9 (Maekawa *et al.* 2003):

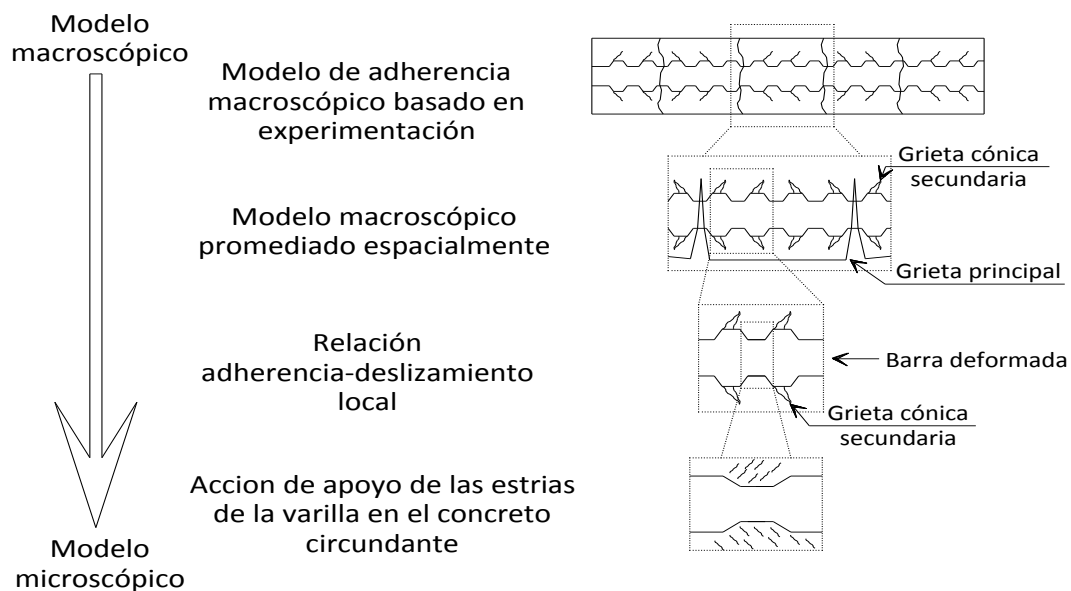


Figura 3.9 Escalas de modelado para la adherencia

Para modelar el efecto de adherencia utilizando el método de elementos finitos se requiere definir una zona de adherencia que defina el comportamiento en la interfaz del concreto y del acero de refuerzo. Diversos estudios han presentado propuestas para realizar lo anterior, la más representativa es la propuesta de introducir un elemento de interfaz de espesor cero y longitud finita tal como se muestra en la figura 3.10. A pesar de que diversas investigaciones arrojan como resultado que la adherencia es un aspecto importante para el dimensionamiento de estructuras de concreto reforzado, un conocimiento profundo de este tema continua siendo escaso, en particular a lo que se refiere a esfuerzos internos y a los mecanismos de falla. Debido a esto, en este trabajo se considera adherencia perfecta entre el concreto y el acero de refuerzo.

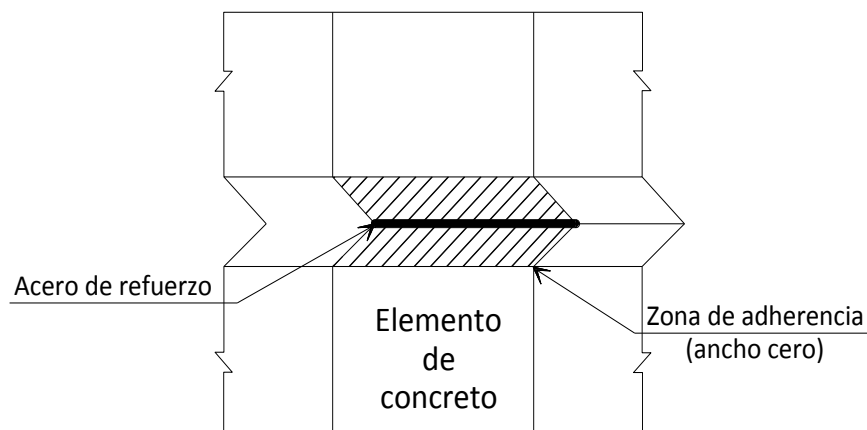


Figura 3.10 Malla de elementos finitos en zona de adherencia

CAPÍTULO 4

Modelos de Daño

Un modelo constitutivo es una formulación matemática cuya función es la de describir el comportamiento físico en la escala macroscópica de un sólido idealizado, tal modelo es el resultado de la aplicación de una serie de hipótesis sobre un sólido real. Debido al empleo de ciertas hipótesis, los modelos constitutivos sólo representan una realidad limitada por lo que su empleo debe efectuarse consecuentemente con ellas (Oller, 2001).

A fin de describir el proceso físico de falla, con los modelos constitutivos de daño se puede representar el comportamiento inelástico de los materiales en los que ocurre una degradación de rigidez en cuanto se alcanza un valor umbral del material. La mecánica del daño es la rama de la mecánica que se encarga del estudio de los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales cuando se someten a fuerzas mediante el empleo de variables mecánicas. El daño puede definirse simplemente como un proceso físico y progresivo por el cual se rompen los materiales. El daño puede verse desde tres perspectivas diferentes conocidas como: microescala, mesoescala y macroescala. En la microescala, el daño se debe a la acumulación de micro esfuerzos en la vecindad de las imperfecciones y a la rotura de ligaduras, dañando ambos mecanismos al material. A nivel de mesoescala de un volumen representativo, el daño se debe al crecimiento y ensamble de fisuras microscópicas y microporos que, en conjunto, inician una fisura. El crecimiento de dicha fisura es el daño evidenciado en la macroescala. Los niveles de microescala y mesoescala pueden estudiarse mediante la mecánica del medio continuo con el uso de variables de daño definidas a nivel de mesoescala, el nivel de macroescala generalmente se estudia empleando la mecánica de fractura usando variables fijadas a un nivel macroscópico.

La mecánica del daño fue introducida por primera vez por Kachanov (1958), quien propuso el empleo de la variable de daño escalar cuyo valor varía de entre cero, sin daño, y uno, completamente dañado, dicha variable escalar conduce a la conservación de la relación de Poisson y es incapaz de representar el daño direccionado. La mecánica del daño se ha desarrollado a tal grado que ha generado conocimientos a niveles que permiten su empleo en problemas prácticos de ingeniería. A diferencia de la mecánica de fractura, que considera el proceso de iniciación y crecimiento de las microfisuras como un proceso discontinuo, la mecánica del daño continuo emplea variables continuas que tienen relación con la densidad de los defectos y así describe el daño en el material antes de que ocurran las microfisuras. Los

modelos de daño anisotrópico fueron desarrollados por Lemaitre y Chaboche (1978) y Chaboche (1995).

En este capítulo se presenta la teoría de los modelos de daño continuo, desarrollando los elementos de un modelo de daño isotrópico.

4.1 Modelo de daño isotrópico: superficie de fluencia igual tensión y compresión (ITC)

Los modelos de daño isotrópico se han utilizado para describir el comportamiento de los materiales que presentan una disminución de sus propiedades mecánicas debido a la existencia de pequeñas fisuras que ocurren durante los procesos de carga. Este proceso puede implementarse en un medio continuo al introducir una variable interna de daño descrita por un escalar, un vector o un tensor. Dicha variable permite cuantificar que tanto daño ha ocurrido en el material así como también relaciona el esfuerzo σ , con el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$.

Considere una pieza de material sometida a un esfuerzo de tensión uniaxial tal como se muestra en la figura 4.1

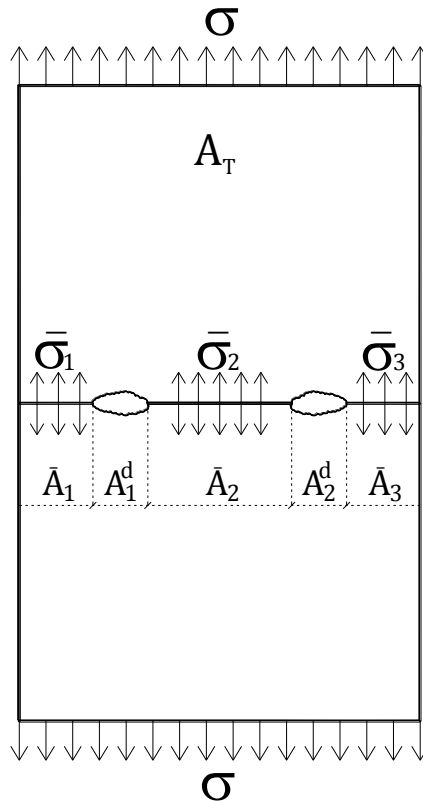


Figura 4.1 Pieza con daño sometida a esfuerzo uniaxial de tensión.

donde se definen los siguientes parámetros:

σ = Esfuerzo

A_T = Área total de la sección transversal de la pieza

$\bar{\sigma}_i$ = Esfuerzo efectivo

\bar{A}_i = Área efectiva

A_i^d = Área dañada

De la figura 4.1 se pueden obtener las siguientes relaciones básicas para el desarrollo del modelo de daño isotrópico.

- Esfuerzo efectivo total:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i \quad (4.1)$$

- Área dañada total:

$$A^d = \sum_{i=1}^n A_i^d \geq 0 \quad (4.2)$$

- Área efectiva total

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \leq A_T \quad (4.3)$$

De las ecuaciones (4.2) y (4.3) se puede deducir el área total como:

$$A_T = A^d + \bar{A} \quad (4.4)$$

Considerando la definición de esfuerzo medio se tiene que:

$$\sigma = \frac{P}{A_T} \quad (4.5)$$

Análogamente se tiene que para el caso del esfuerzo efectivo:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{\bar{A}} \quad (4.6)$$

Como la fuerza P se considera constante, igualando las ecuaciones (4.5) y (4.6) y despejando para el esfuerzo efectivo, se tiene

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma A_T}{\bar{A}} \quad (4.7)$$

Empleando la ley de Hooke, la cual en el caso unidimensional tiene la forma tanto para el esfuerzo como el esfuerzo efectivo respectivamente, dada por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad y \quad \bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (4.8)$$

Sustituyendo la ecuación (4.8) en (4.7) se obtiene:

$$\sigma = \frac{E\varepsilon\bar{A}}{A_T} \quad (4.9)$$

Para relacionar el área dañada con el área total de la sección transversal se emplea la variable d , esta variable se conoce como variable de daño escalar. Esta variable se puede expresar matemáticamente en función del área como:

$$d = \frac{A^d}{A_T} ; 0 \leq d \leq 1 \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) despejada para \bar{A} en la ecuación (4.9) se obtiene una relación fundamental empleada en los modelos de daño isotrópico

$$\sigma = E\varepsilon \left(1 - \frac{A^d}{A_T}\right) = E\varepsilon (1 - d) = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (4.11)$$

La ecuación anterior muestra que el esfuerzo efectivo está relacionado con el esfuerzo a través de d .

La ecuación (4.12) muestra que el esfuerzo está relacionado con las deformaciones por medio de un módulo no lineal que depende de d .

$$\sigma = E^d \varepsilon ; E^d = (1 - d)E \quad (4.12)$$

donde: E^d = modulo elástico dañado.

Hasta este punto se pueden hacer los siguientes comentarios:

- a) Una vez que un material sufre daño, ya no puede repararse, pues el área dañada siempre permanecerá dañada e incluso puede crecer para dañarse más, lo anterior se expresa

$$\frac{\partial A^d}{\partial t} \geq 0 ; \dot{A}^d \geq 0 \quad (4.13)$$

Si $d = \frac{A^d}{A_T} \rightarrow \dot{d} = \frac{\dot{A}^d}{A_T} \geq 0 \quad \therefore d$ siempre crece.

Si $E^d = (1 - d)E \rightarrow \dot{E}^d = -\dot{d}E \leq 0 \quad \therefore E$ siempre se degrada.

- b) Sólo puede existir daño si se sobrepasa el umbral límite ya sea para esfuerzo o deformación, es decir

$$d = 0 \quad \text{si} \quad \sigma < \sigma_0$$

$$d = 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon < \varepsilon_0$$

c) Si las deformaciones se reducen

$$\dot{\varepsilon} < 0 \rightarrow \dot{A}^d = 0 \rightarrow \dot{d} = 0$$

Por lo que al derivar la ecuación (4.11) respecto al tiempo

$$\dot{\sigma} = (1 - d)E\dot{\varepsilon} - \dot{d}E\varepsilon = (1 - d)E\dot{\varepsilon} = E^d\dot{\varepsilon} \quad (4.14)$$

En la figura 4.2 se presenta el fenómeno macroscópico descrito anteriormente

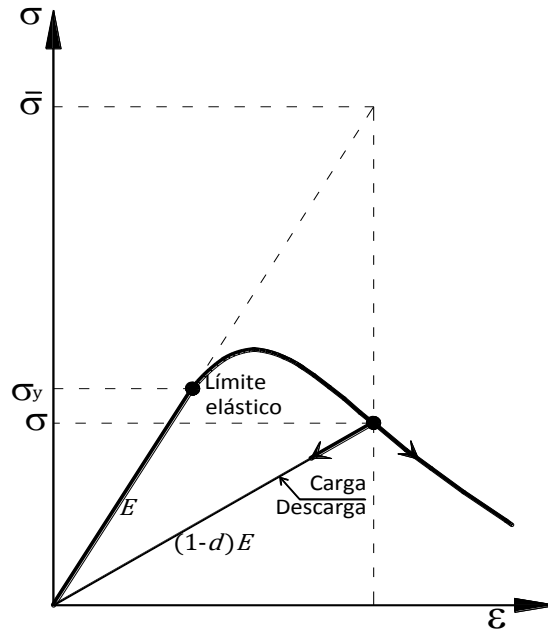


Figura 4.2 Módulo de elasticidad degradado por daño

4.1.1 Generalización a 3D

El caso tridimensional resulta ser una generalización del problema unidimensional, es decir, en lugar de efectuar el procedimiento numérico con escalares se realiza con vectores. De tal modo, de la ec. (4.11) el esfuerzo como función del esfuerzo efectivo es:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \varepsilon = \mathbb{C}^d : \varepsilon \quad (4.15)$$

donde \mathbb{C} es el tensor constitutivo elástico estándar de cuarto orden y \mathbb{C}^d es el tensor constitutivo elástico degradado.

El tensor de cuarto orden \mathbb{C} puede indicarse en función de las constantes λ y μ , llamadas también constantes de Lamé:

$$\mathbb{C} = 2\mu I + \lambda (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (4.16)$$

en la que $\mathbf{1}$ es un tensor unitario de segundo orden, I es un tensor unitario de cuarto orden correspondiente a $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y las constantes de Lamé se definen por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

4.1.2 Ecuación constitutiva

La energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para el caso de un modelo de daño isotrópico se puede escribir

$$\Psi(\varepsilon, d) = (1 - d)\Psi_0(\varepsilon) \quad (4.17)$$

donde Ψ_0 es la energía libre de Helmholtz de un material elástico no dañado, definida como

$$\Psi_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon = \frac{1}{2} \mathbb{C} : \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \varepsilon \quad (4.18)$$

Sustituyendo la ecuación (4.18) en la (4.17)

$$\Psi(\varepsilon, d) = (1 - d) \frac{1}{2} \mathbb{C} : \varepsilon^2 \quad (4.19)$$

El esfuerzo puede expresarse en función de la energía libre de Helmholtz mediante la siguiente expresión

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1 - d) \mathbb{C} : \varepsilon = (1 - d) \bar{\sigma} \quad (4.20)$$

La ecuación anterior se conoce también como ecuación constitutiva secante del modelo de daño.

En problemas que son térmicamente estables es válida la desigualdad de Clausius-Plank, conocida también como potencial de disipación

$$\dot{\mathcal{E}} = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) debe satisfacerse para cualquier variación temporal del campo de deformaciones ε , por lo que la variación del campo de deformaciones respecto al tiempo debe ser cero.

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\Psi_0 \quad \rightarrow \quad -\Psi_0 \quad \text{conjugada de } d \quad (4.22)$$

Tomando en cuenta la ley constitutiva, la disipación del modelo de degradación resulta:

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \quad (4.24)$$

4.1.3 Criterio de daño

El criterio de daño se emplea para determinar si un material presenta comportamiento elástico o inelástico. Para ello se plantea una condición que tiene por nombre función de daño, dicha función delimita el comportamiento elástico del inelástico que es donde inicia la degradación de las propiedades del material. Para poder definir una función de daño se requiere una norma en el espacio de esfuerzos o deformaciones.

En el caso del espacio de esfuerzos, la norma se puede definir como

$$\tau_\sigma = \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{e^{-1}}} = \sqrt{\sigma : \mathbb{C}^{e^{-1}} : \sigma} \quad (4.25)$$

En el espacio de deformaciones, la norma queda definida por

$$\tau_\varepsilon = \|\varepsilon\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon} = \sqrt{2\Psi_0} \quad (4.26)$$

Las normas en el espacio de esfuerzos y en el espacio de deformaciones pueden relacionarse entre ellas mediante la siguiente relación

$$\tau_\sigma = \sqrt{\sigma : \mathbb{C}^{e^{-1}} : \sigma} = \sqrt{(1-d)\bar{\sigma} : \mathbb{C}^{e^{-1}} : (1-d)\bar{\sigma}} = (1-d)\tau_\varepsilon \quad (4.27)$$

Con la norma en el espacio de esfuerzos se puede definir una región elástica determinada por la siguiente relación conocida también como dominio elástico en el espacio de esfuerzos

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma | f(\tau_\sigma, q) < 0\} \quad (4.28)$$

Análogamente, para el campo de deformaciones se tiene el dominio elástico en el espacio de deformaciones

$$\mathbb{E}_\varepsilon = \{\varepsilon | f(\tau_\varepsilon, r) < 0\} \quad (4.29)$$

En la ecuación (4.28) q es una función que se emplea para definir el ablandamiento/endurecimiento del material y que además regula el tamaño del espacio de esfuerzos, mientras que en la ecuación (4.29) r es una variable interna cuyo valor define el límite elástico.

Finalmente, la función de daño puede definirse en el campo de esfuerzos y en el campo de deformaciones, ambas funciones quedan definidas respectivamente como

$$f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q \quad (4.30)$$

$$g(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r \quad (4.31)$$

La representación gráfica de las normas tanto en el campo de esfuerzos como en el campo de deformaciones se presenta en la figura 4.3.

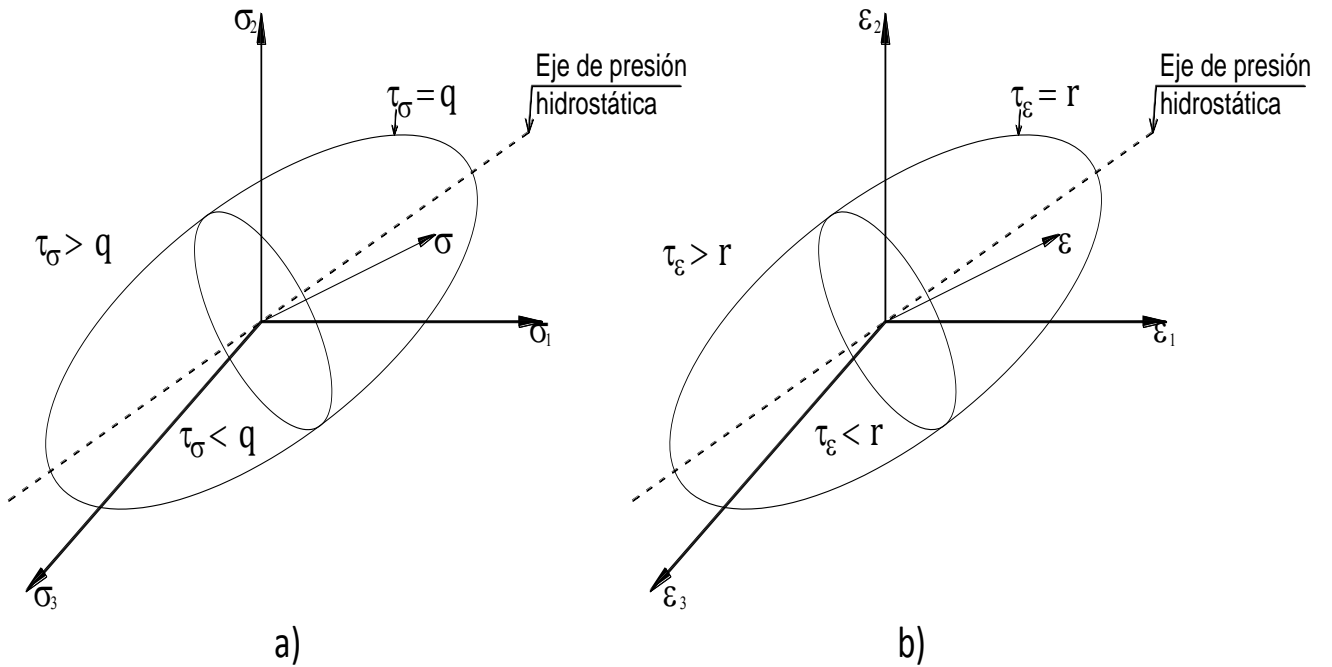


Figura 4.3 Representación de normas: a) campo de esfuerzos y b) campo de deformaciones

4.1.4 Regla de endurecimiento/ablandamiento

La ecuación (4.31), que representa la función de daño en el campo de deformaciones, puede igualarse en un punto ubicado sobre la línea que delimita la superficie o umbral

$$\tau_\varepsilon = r \quad ; \quad \tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon} = r \quad (4.32)$$

Para el caso unidimensional la ecuación (4.32) toma la forma

$$r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (4.33)$$

donde r_0 es el valor umbral inicial y σ_u es el esfuerzo último, el cual delimita el comportamiento elástico.

La variable de endurecimiento/ablandamiento, la cual depende de la variable interna r , puede definirse mediante la siguiente expresión:

$$q(r) = (1 - d)r \rightarrow d = 1 - \frac{q(r)}{r} \rightarrow d = (r - q(r))r^{-1} \quad (4.34)$$

Para poder determinar la razón de cambio respecto al tiempo de la variable de daño, d , es necesario aplicar la regla de la cadena a la ecuación (4.34), así

$$\frac{d(d)}{dt} = \dot{d} = \left[\frac{q(r) - (q'(r))r}{r^2} \right] \dot{r} = d'(r)\dot{r} \quad ; \quad q'(r) = \frac{dq(r)}{dr} \quad (4.35)$$

Combinando las ecs. (4.34) y (4.15) se puede obtener una expresión para el esfuerzo en función de la variable de endurecimiento/ablandamiento:

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}q(r)}{r} \quad (4.36)$$

De la ecuación (4.34) se puede observar que cuando la variable de daño d es igual a cero, la variable interna r tiene el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a uno, r vale ∞ . En otras palabras, para este segundo caso en que r vale ∞ significa que el valor de $q(r)$ presenta su máximo valor, lo que conduce a deducir que mientras r puede tener cualquier valor, incluso el valor de infinito, la variable de endurecimiento /ablandamiento tiende a tener un valor máximo q_{max} como se muestra en la figura 4.4:

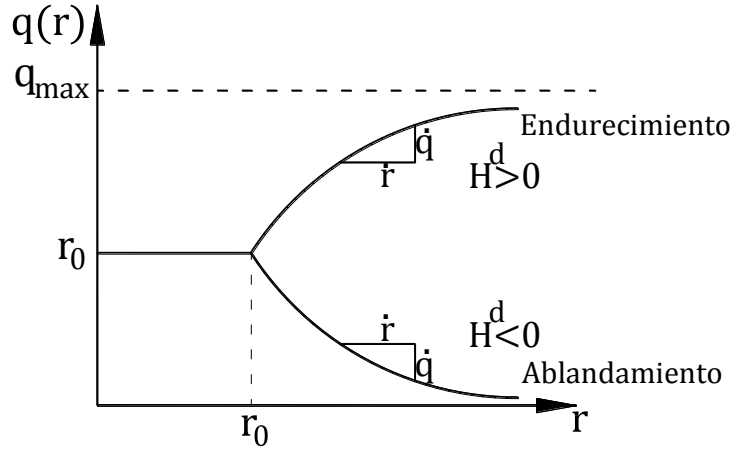


Figura 4.4 Ley de endurecimiento/ablandamiento

donde H^d es el módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo, de la figura 4.4 se puede obtener la siguiente ecuación que se conoce como ley de endurecimiento:

$$H^d = \frac{\dot{q}(r)}{\dot{r}}; \quad H^d = q'(r); \quad q \in [0, \sigma_u]; \quad q_0 = r_0 \quad (4.37)$$

En el presente trabajo se describen los dos tipos de endurecimiento/ablandamiento más comunes en la literatura, el primero de ellos es el endurecimiento/ablandamiento del tipo lineal, el segundo es el endurecimiento/ablandamiento del tipo exponencial.

La ley de endurecimiento/ablandamiento lineal (figura 4.5a) está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\text{si } r < r_0 \quad \therefore \quad q = r_0 \quad (4.38)$$

$$\text{si } r > r_0 \quad \therefore \quad q = r_0 + H^d(r - r_0) \quad (4.39)$$

$$\text{si } r < r_0 \quad \therefore \quad d = 0 \quad (4.40)$$

$$\text{si } r > r_0 \quad \therefore \quad d = 1 - \frac{r_0}{r} - H^d \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \quad (4.41)$$

y la ley de endurecimiento/ablandamiento exponencial (figura 4.5b) está descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\text{si } r < r_0 \quad \therefore \quad q = r_0 \quad (4.42)$$

$$\text{si } r > r_0 \quad \therefore \quad q = r_0 e^{\left(-H^d \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right)} \quad (4.43)$$

$$\text{si } r < r_0 \quad \therefore \quad d = 0 \quad (4.44)$$

$$\text{si } r > r_0 \quad \therefore \quad d = 1 - \frac{r_0}{r} e^{\left(-H^d \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right)} \quad (4.45)$$

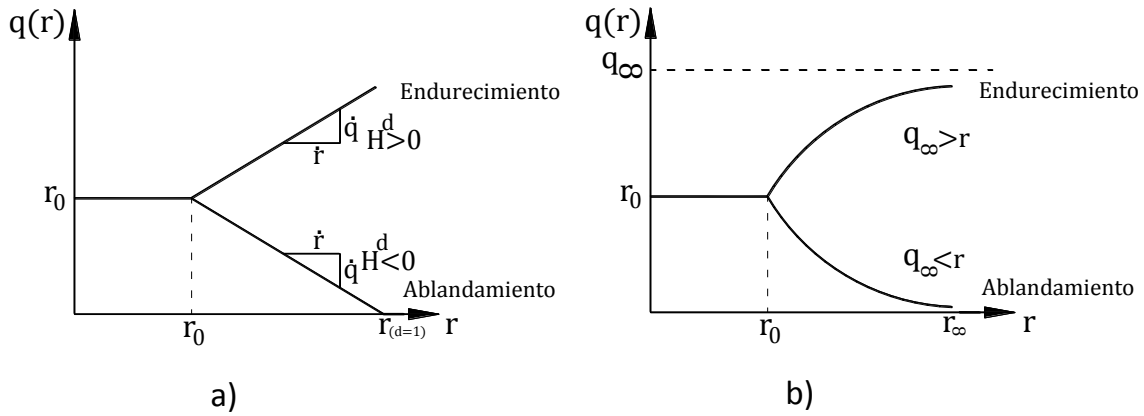


Figura 4.5 Ley de endurecimiento/ablandamiento: a) lineal y b) exponencial

De las ecuaciones (4.38) a (4.45) y de la figura 4.5 se pueden realizar tres observaciones importantes, la primera es que cuando $H^d > 0$ existe endurecimiento y por tanto la variable de endurecimiento/ablandamiento, q , siempre crece, esto, físicamente significa que mientras más deformación sufre el material, más esfuerzo resiste. La segunda es que cuando $H^d < 0$ existe ablandamiento por lo que la variable q siempre decrece, lo que quiere decir que mientras más deformación sufre el material, resiste menos esfuerzo, además, para que exista ablandamiento el material primero debe empezar a fallar. Una última observación es que si $H^d = 0$, q no crece ni decrece si no que se mantiene constante, a lo que se le conoce como daño perfecto.

La ecuación siguiente muestra la ley de evolución de la variable interna:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \gamma \quad (4.46)$$

γ es un escalar llamado parámetro de consistencia de daño o multiplicador de daño. El rango de validez de la variable interna r es $[0, \infty]$.

Por lo que, finalmente, en esta parte se tiene que la evolución de la variable de daño es:

$$\dot{d} = \frac{dr}{dt} \frac{df(\tau_\sigma - q)}{dr} = \gamma \frac{df(\tau_\sigma - q)}{dr} \quad (4.47)$$

4.1.5 Condiciones de carga y descarga

Las condiciones de carga y descarga pueden abordarse desde dos perspectivas diferentes, la primera es geoméricamente y la segunda es matemáticamente. Primero se tratará la perspectiva geométrica y posteriormente la perspectiva matemática.

4.1.5.1 Perspectiva geométrica

Suponiendo que en un tiempo t_1 se conocen tanto los esfuerzos σ_{t1} como las deformaciones ε_{t1} , suponiendo también que en un tiempo $t_{t+\Delta t}$ se conocen también sus respectivas $\sigma_{t+\Delta t}$ y $\varepsilon_{t+\Delta t}$. Entonces puede presentarse alguna de las siguientes posibilidades mostradas en la figura 4.6.

- a) Si σ_{t1} y ε_{t1} se encuentran dentro de $\mathbb{E}_t \therefore \dot{r} = 0$ y $\dot{d} = 0$, por lo que los esfuerzos y las deformaciones se encuentran en el **rango elástico**.
- b) Si σ_{t1} y ε_{t1} se encuentran sobre la superficie de $\partial\mathbb{E}_t$ pero $\sigma_{t+\Delta t}$ y $\varepsilon_{t+\Delta t}$ se encuentran dentro de $\mathbb{E}_t \therefore \dot{r} = 0$ y $\dot{d} = 0$, lo que indica que en el tiempo t_1 , los esfuerzos y las deformaciones alcanzaron el umbral de daño, pero en el tiempo siguiente $t+\Delta t$ dichos esfuerzos y deformaciones regresaron al límite elástico, por lo que se concluye en este caso que los esfuerzos y deformaciones están en una **condición de descarga**.
- c) Si σ_{t1} y ε_{t1} se encuentran sobre la superficie de $\partial\mathbb{E}_t$ y además $\sigma_{t+\Delta t}$ y $\varepsilon_{t+\Delta t}$ se encuentran en la misma superficie, se tiene que $\dot{r} = 0$ y $\dot{d} = 0$, lo que indica que en el tiempo t_1 , los esfuerzos y las deformaciones alcanzaron la superficie de daño, y en el tiempo siguiente $t+\Delta t$ dichos esfuerzos y deformaciones permanecieron en dicha superficie, por lo que se concluye en este caso que los esfuerzos y deformaciones están en una **condición de carga neutra**.
- d) Si σ_{t1} y ε_{t1} se encuentran sobre la superficie de $\partial\mathbb{E}_t$ pero $\sigma_{t+\Delta t}$ y $\varepsilon_{t+\Delta t}$ se encuentran dentro de otra superficie $\partial\mathbb{E}_{t2}$ mayor a $\partial\mathbb{E}_t \therefore \dot{r} \neq 0$ y $\dot{d} \neq 0$, lo que indica que los esfuerzos y deformaciones están aumentando, aumentando así también la superficie de daño, por lo que se concluye que tanto los esfuerzos como las deformaciones se encuentran en una **condición de carga**.

4.1.5.2 Perspectiva matemática

Esta perspectiva es conocida con el nombre de condiciones de Kuhn-Tucker, las cuales se definen como:

$$g(\tau_\varepsilon, r) \leq 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma g(\tau_\varepsilon, r) = 0 \quad (4.48)$$

Con estas condiciones se pueden obtener el valor del parámetro de consistencia de daño γ , y para ello se hacen las siguientes observaciones:

- Se sabe que el valor de la función de daño definida en la ecuación (4.31) debe ser ≤ 0 , es decir, $g(\tau_\varepsilon, r) \leq 0$; $\tau_\varepsilon - r \leq 0$ y que $\gamma \geq 0$.

- Si en un tiempo t , $\varepsilon < \varepsilon_0 \therefore d = 0 \rightarrow \dot{d} = 0$, con lo cual se cumple que $\tau_\varepsilon - r < 0$, lo que implica que \dot{r} no evoluciona y por tanto $\gamma = 0$. Por el contrario para que $\tau_\varepsilon - r = 0$, el valor de γ debe ser $\gamma \geq 0$. Estas relaciones llevan a $\tau_\varepsilon - r < 0 \Rightarrow \gamma = 0$; $\tau_\varepsilon - r = 0 \Rightarrow \gamma \geq 0$ con lo que se puede determinar que $g(\tau_\varepsilon, r) \leq 0$.
- La condición $\tau_\varepsilon - r = 0$ nos permite calcular el valor para $\gamma \geq 0$. Si se supone que en un tiempo determinado t las deformaciones se encuentran dentro de una superficie $\partial\mathbb{E}_t$ entonces $g(\tau_\varepsilon, r) = 0$, por lo que se puede determinar que $\dot{g}(\tau_\varepsilon, r) \leq 0$, ya que si $\dot{g}(\tau_\varepsilon, r)$ fuera mayor que cero, llevaría a que en el tiempo siguiente $t+\Delta t$ el valor de la función de daño en cuestión sería mayor que cero, lo que no podría ser posible, ya que habría una violación de la condición en la que tal función de daño debe ser menor que cero. Con base en lo anterior se puede mencionar que para que $g(\tau_\varepsilon, r)$ persista sobre la superficie de daño $\partial\mathbb{E}_t$, la razón de cambio de la función de daño respecto al tiempo debe ser igual a cero y por tanto el valor del parámetro de consistencia de daño debe ser igual o mayor que cero. Por el contrario, si la función de daño $g(\tau_\varepsilon, r)$ se encuentra dentro del dominio elástico su razón de cambio respecto al tiempo es menor a cero, es decir, $\dot{g}(\tau_\varepsilon, r) < 0$ y por tanto $\gamma = 0$. De manera simplificada se puede decir que $\dot{g}(\tau_\varepsilon, r) = 0 \Rightarrow \gamma \geq 0$; $\dot{g}(\tau_\varepsilon, r) < 0 \Rightarrow \gamma = 0$ por lo que en consecuencia se obtiene la siguiente condición:

$$\gamma \dot{g}(\tau_\varepsilon, r) = 0 \quad (4.49)$$

A la condición definida en la ecuación (4.49) se le conoce con el nombre de condición de consistencia o condición de persistencia.

De las tres observaciones descritas anteriormente se pueden extraer los siguientes comentarios:

- Para encontrarse en la condición elástica se debe cumplir que: $g(\tau_\varepsilon, r) < 0$ y por lo tanto $\tau_\varepsilon - r < 0$ en un tiempo t , de lo que se puede saber que $\tau_\varepsilon < r$, determinando finalmente que $\gamma = \dot{r} = 0$ y que $\gamma g(\tau_\varepsilon, r) = 0$.
- Para encontrarse en la condición inelástica se debe de cumplir que: $g(\tau_\varepsilon, r) = 0$ por lo tanto $\tau_\varepsilon - r = 0$ en un tiempo t , de lo que se puede saber que $\tau_\varepsilon = r$, determinando finalmente que $\gamma = \dot{r} \geq 0$ requiriéndose que $\gamma \dot{g}(\tau_\varepsilon, r) = 0$. Si esta condición se cumple pueden existir las siguientes posibilidades:
 - a. Si la función de daño en el tiempo $t+\Delta t$ es menor que cero, en consecuencia su variación respecto al tiempo también será menor que cero, lo que significa que

$\gamma = \dot{\gamma} = 0$ y por tanto $\dot{\epsilon}_e < \dot{\gamma}$ y $\dot{\epsilon}_e < 0$. En estas condiciones el estado de esfuerzos se encuentra en condición de descarga.

- b. Si la función de daño en el tiempo $t+\Delta t$ es igual a cero, en consecuencia su variación respecto al tiempo también será igual a cero, lo que significa que $\dot{\epsilon}_e = \dot{\gamma}$ y que γ puede tomar alguno de los siguientes valores:

- $\gamma = 0$ cuando $\dot{\gamma} = 0 \quad \therefore \quad \dot{\epsilon}_e = 0$, encontrándose en una condición de carga neutra.
- $\gamma > 0$ cuando $\dot{\gamma} > 0 \quad \therefore \quad \dot{\epsilon}_e = \dot{\gamma} > 0$, encontrándose en una condición de carga progresiva.

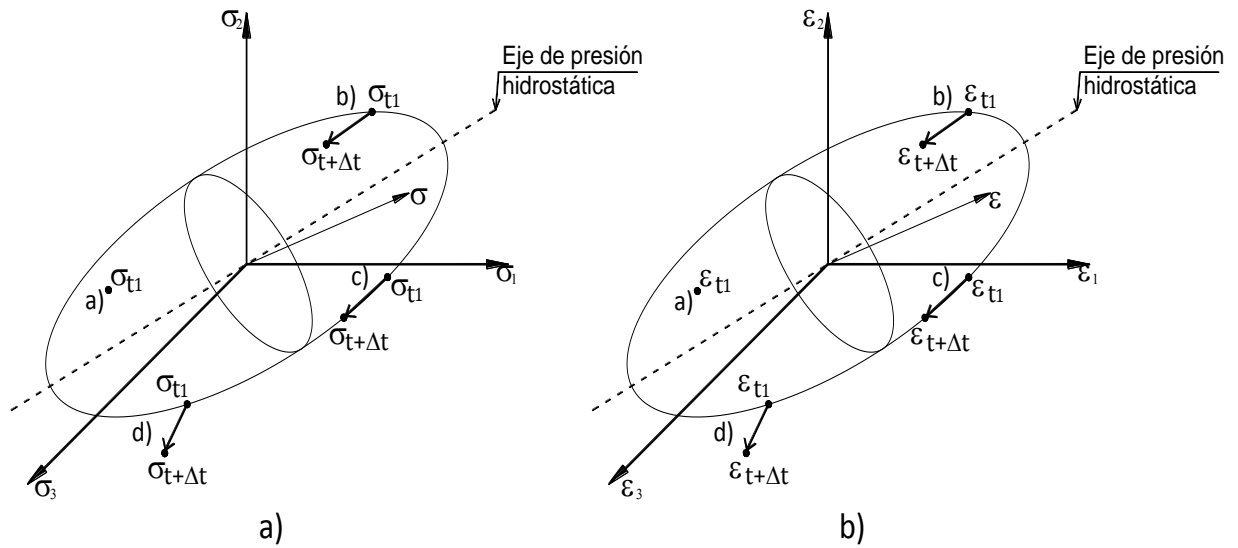


Figura 4.6 Condiciones de carga y descarga: a) campo de esfuerzos y b) campo de deformaciones

4.1.6 Módulo tangente

El módulo tangente es un operador de la razón de cambio entre los esfuerzos y las deformaciones, y se expresa como:

$$\mathbb{C}^T = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \rightarrow \dot{\sigma} = \mathbb{C}^T : \dot{\epsilon} \quad (4.50)$$

donde \mathbb{C}^T es el módulo constitutivo tangente, es necesario aclarar que el módulo constitutivo tangente es idéntico al tensor constitutivo elástico \mathbb{C} en el rango elástico, tal como se observa en la figura 4.7.

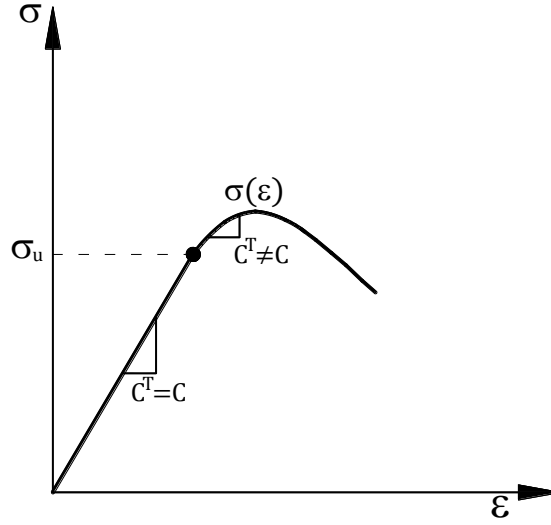


Figura 4.7 Igualdad y desigualdad de los módulos constitutivos tangente y elástico

De la ecuación (4.50) se puede deducir que

$$\mathbb{C}^T = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (4.51)$$

Retomando la ecuación (4.15) y calculándole su variación respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\varepsilon} - \dot{d}\mathbb{C} : \varepsilon \quad (4.52)$$

Sustituyendo la relación $\bar{\sigma} = \mathbb{C} : \varepsilon$ en el segundo término de la ecuación anterior

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\varepsilon} - \dot{\bar{\sigma}} \quad (4.53)$$

De la ecuación (4.53) se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Si $\dot{r} = 0$, es decir, que la variable interna no evoluciona, entonces se tienen los siguientes casos: elástico, inelástico en descarga o inelástico en carga neutra por lo que necesariamente $\dot{d} = 0$ y la ecuación (4.53) se transforma en:

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\mathbb{C} : \dot{\varepsilon} \quad (4.54)$$

En tal ecuación se puede observar que para el caso descrito, el operador constitutivo tangente es $\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C}$, concluyendo así que para este caso en particular el operador constitutivo tangente es el mismo que el modulo elástico degradado, en otras palabras, $\mathbb{C}^T = \mathbb{C}^d$.

- Si $\dot{r} > 0$, es decir, que la variable interna evoluciona, entonces se trata del caso inelástico en carga, por lo que se harán los siguientes cálculos:

De la ecuación (4.35) se sabe que $\dot{d} = d'(r)\dot{r}$ y de la ecuación (4.37) se tiene que $H^d = q(r)$, por lo que al sustituir ésta última en la primera se tiene:

$$\dot{d} = d'(r)\dot{r} = \frac{q(r) - (q'(r)r)}{r^2} \dot{r} = \frac{q(r) - H^d}{r^2} \dot{r} \quad (4.55)$$

Si se está en la condición de carga se sabe que $\dot{r} = \dot{\tau}_\varepsilon$ ya que $\dot{\tau}_\varepsilon - \dot{r} = 0$, y tomando en cuenta que la norma de deformaciones se representa por la ecuación (4.26), derivando respecto al tiempo la ecuación (4.26) se tiene:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_\varepsilon = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\sigma} : \mathbb{C}^{e^{-1}} : \mathbb{C} : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\sigma} : \mathbb{A} : \dot{\varepsilon} \quad (4.56)$$

donde el valor de \mathbb{A} es $(\mathbb{C}^{e^{-1}} : \mathbb{C}) = I$.

Sustituyendo la ecuación (4.55) y (4.56) en la ecuación (4.53) y agrupando los términos da como resultado la expresión:

$$\dot{\sigma} = \underbrace{(1 - d)\mathbb{C} - \frac{d'(r)}{\tau_\varepsilon} [\bar{\sigma} \otimes (\bar{\sigma} : I)]}_{\mathbb{C}^T} : \dot{\varepsilon} \quad (4.57)$$

Considerando la forma que tiene las ecuaciones (4.50) y (4.57) se puede deducir que el valor del operador constitutivo tangente es:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \frac{d'(r)}{\tau_\varepsilon} [\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}] \quad (4.58)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (4.55) y (4.37) en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación para calcular el valor del tensor constitutivo tangente:

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \left(\frac{q(r) - H^d}{\tau_\varepsilon r^2} \right) (\mathbb{C} : \varepsilon \otimes \varepsilon : \mathbb{C}) \quad (4.59)$$

El operador constitutivo tangente \mathbb{C}^T se emplea para determinar la tangente a la curva esfuerzo – deformación, lo que le permite a cualquier programa de elementos finitos aproximarse a la solución de forma cuadrática usando el método de Newton-Raphson para determinar el resultado del sistema de ecuaciones no lineales.

El modelo de daño isotrópico con superficie de fluencia igual en tensión y compresión se resume mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) Energía libre de Helmholtz} \quad \Psi(\varepsilon, d) = (1 - d)\Psi_0(\varepsilon)$$

- b) Variable de daño $d = 1 - \frac{q(r)}{r}; \quad q \in [r_0, 0]; \quad d \in [0, 1]$
- c) Ecuación constitutiva $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \varepsilon$
- d) Ley de evolución de daño $\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$
- e) Criterio de daño $g(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r = \sqrt{\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon} - r; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases}$
- f) Regla de endurecimiento/ablandamiento $\dot{q} = H^d \dot{r}; \quad H^d = q'(r) \leq 0$
- g) Condiciones de carga y descarga $\tau_\varepsilon - r < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma g(\tau_\varepsilon, r) = 0$
- h) Condición de persistencia $\gamma \dot{g}(\tau_\varepsilon, r) = 0 \quad \text{si} \quad g(\tau_\varepsilon, r) = 0$

4.2 Modelo de daño isotrópico: superficie de fluencia diferente tensión y compresión (DTC)

Para la formulación de este modelo de daño, se parte del modelo de daño explicado en la sección anterior. La diferencia básica entre ambos modelos de daño radica en la definición de la norma de deformación y/o de esfuerzo, al ser afectada por un parámetro propuesto por Lubliner *et al.* (1989).

En materiales como el concreto, el umbral de daño en compresión es alrededor de diez a veinte veces mayor que el umbral de daño en tensión, $n = f'_c / f'_t$, como se muestra en la figura 4.8. Para tener una superficie con estas características, la norma de esfuerzo (4.25) o de deformación (4.26) se modifica con el parámetro \mathcal{M} , así

$$g(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r = \mathcal{M} \sqrt{\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon} - r; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases} \quad (4.60)$$

Además, el operador constitutivo tangente \mathbb{C}^T para el rango de carga no lineal, definido en la ecuación (4.59), se modifica por :

$$\mathbb{C}^T = (1 - d)\mathbb{C} - \mathcal{M}^2 \left(\frac{q(r)}{r^3} - \frac{H^d}{r^2} \right) (\mathbb{C} : \varepsilon \otimes \varepsilon : \mathbb{C}) \quad (4.61)$$

El parámetro \mathcal{M} , se define como:

$$\mathcal{M} = \theta + \left(\frac{1-\theta}{n}\right) \quad (4.62)$$

donde θ es un factor de peso que depende del estado de esfuerzos principales que se expresa como:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (4.63)$$

en la que σ_i son los esfuerzos principales, $\langle \rangle$ es el símbolo matemático para indicar que sólo se consideran los esfuerzos principales positivos, el denominador corresponde a la suma del valor absoluto de cada uno de los esfuerzos principales. Los valores extremos que puede tomar el factor θ son $[0,1]$, cero para el caso de compresión triaxial ($0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) y uno para el caso de tensión triaxial ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$). Los valores extremos para el parámetro \mathcal{M} son $[1, 1/n]$, uno para el caso de tensión triaxial y $1/n$ para el caso de compresión triaxial.

El parámetro \mathcal{M} escala los esfuerzos de compresión ($1/n$) veces para que éstos se comparen contra el valor del umbral de daño, el cual está en función del esfuerzo último a tensión del material, de esta manera se determina si existe falla del material en compresión. La representación gráfica de la superficie de daño correspondiente a $\tau_\varepsilon - r$ en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ así como la curva esfuerzo-deformación uniaxial para el modelo propuesto se muestra en la figura 4.8

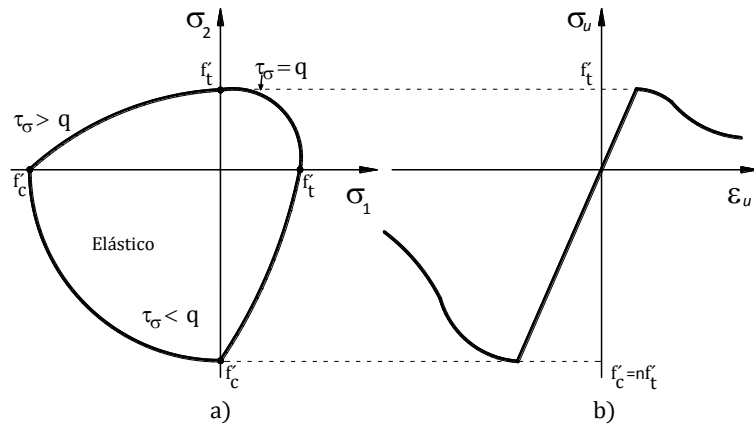


Figura 4.8 Modelo diferente tensión y compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación

El modelo de daño isotrópico con superficie de fluencia diferente en tensión y compresión se resume mediante las siguientes ecuaciones:

a) Energía libre de Helmholtz

$$\Psi(\varepsilon, d) = (1 - d)\Psi_0(\varepsilon)$$

- b) Variable de daño $d = 1 - \frac{q(r)}{r}; \quad q \in [r_0, 0]; \quad d \in [0, 1]$
- c) Ecuación constitutiva $\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1 - d)\mathbb{C} : \varepsilon$
- d) Ley de evolución de daño $\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$
- e) Criterio de daño $g(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r = \mathcal{M}\sqrt{\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon} - r; \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ t = 0 \rightarrow r_0 = r \end{cases}$
- f) Regla de endurecimiento/ablandamiento $\dot{q} = H^d \dot{r}; \quad H^d = q'(r) \leq 0$
- g) Condiciones de carga y descarga $\tau_\varepsilon - r < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma g(\tau_\varepsilon, r) = 0$
- h) Condición de persistencia $\gamma \dot{g}(\tau_\varepsilon, r) = 0 \quad \text{si} \quad g(\tau_\varepsilon, r) = 0$

CAPÍTULO 5

Ejemplos de aplicación numérica

Los dos modelos de daño presentados en este trabajo, superficie de fluencia igual tensión y compresión (ITC) y, superficie de fluencia diferente tensión y compresión (DTC), fueron desarrollados para su empleo tanto en elementos planos (2D) como en elementos tridimensionales (3D). En el presente capítulo se describen diversos ejemplos donde se aplican estos modelos. Los modelos se validan con resultados experimentales reportados en la literatura y con simulaciones numéricas empleando otro tipo de formulaciones.

Los ejemplos que se presentan abarcan tanto concreto simple como concreto reforzado. Es importante mencionar que aunque el título de esta tesis haga referencia a la simulación de elementos de concreto reforzado en su evolución al colapso, también se incluyen ejemplos de elementos de concreto simple, debido a que estos ejemplos, contribuyeron en gran medida a la validación de los modelos desarrollados. Para el caso de los elementos de concreto reforzado, el acero de refuerzo se modela mediante una superficie de von Mises, además de que no se considera deslizamiento en la interfaz del acero de refuerzo con el concreto, es decir, se considera adherencia perfecta.

La metodología para el desarrollo de los ejemplos se divide básicamente en tres pasos: 1) pre-proceso: generación del mallado a utilizar; 2) proceso principal: elaboración del archivo de entrada para ejecutarse en el programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 2008) y 3) post-proceso: visualización de los resultados. Para la programación de los modelos de daño en subrutinas se usó el lenguaje de programación de alto nivel Fortran.

Todos, a excepción de los últimos cuatro ejemplos que se analizan con el modelo de daño DTC en 3D, se simulan primero en 2D con los modelos de daño ITC y DTC, y después se simulan también en 3D con ambos modelos. Por consiguiente, los ejemplos se presentan de tal manera que se muestran los resultados de las simulaciones tanto en 2D como en 3D, para observar la diferencia en los resultados al usar un modelo u otro. Para las simulaciones en 2D se emplea la condición de esfuerzo plano. En todos los análisis se emplea una ley de ablandamiento del tipo exponencial.

5.1 Espécimen de concreto simple con ranura al centro

En este ejemplo se tiene un bloque de concreto simple ranurado en la parte superior, sometido a un proceso de tensión uniaxial. La carga se induce en forma de desplazamientos aplicados gradualmente en el borde derecho en la dirección positiva del eje x . La geometría y las condiciones de frontera se observan en la figura 5.1. Las propiedades mecánicas del material son: módulo elástico $E = 10,000 \text{ MPa}$ ($101,971.62 \text{ kg/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 1.0 \text{ MPa}$ (10.20 kg/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 10 \text{ MPa}$ (102 kg/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.02 \text{ Nm/mm}^2$ (0.2 kgf m/cm^2).

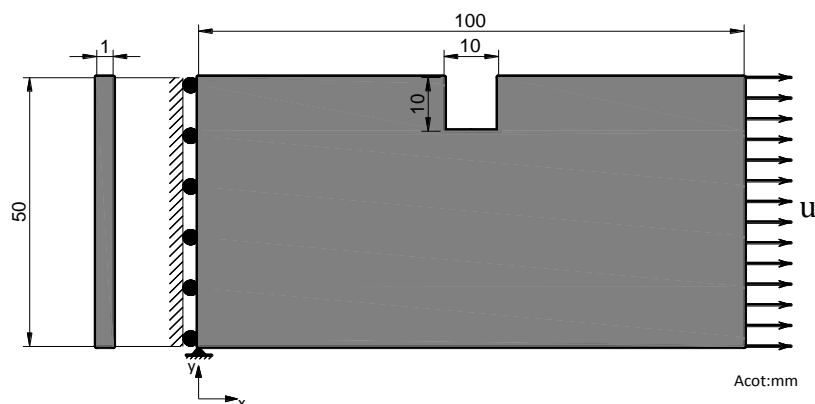


Figura 5.1 Geometría de espécimen con ranura al centro

En las figuras 5.2 y 5.3 se muestran la malla estructurada, que consta, para el caso en 2D, de elementos cuadriláteros de cuatro nodos con cuatro puntos de integración de Gauss y, para el caso en 3D, de elementos hexaedros de ocho nodos con ocho puntos de integración de Gauss. El daño inicia en los elementos ubicados en la vecindad de la ranura. En la figura 5.4 se observa una comparación de los resultados obtenidos tanto en 2D como en 3D, contra los presentados por Wells y Sluys (2000), quienes obtuvieron sus resultados utilizando un modelo de discontinuidades interiores, en esta figura se observa que los resultados obtenidos son consistentes con los numéricos.

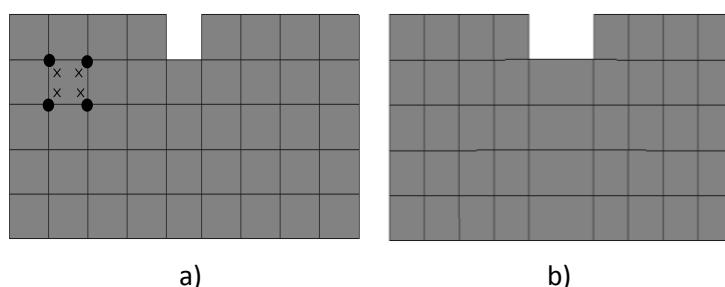


Figura 5.2 Malla en 2D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada

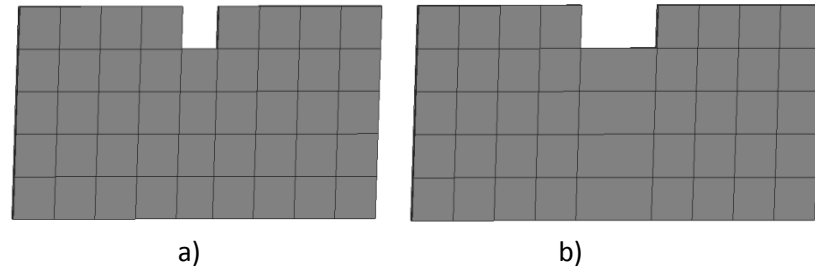


Figura 5.3 Malla en 3D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada

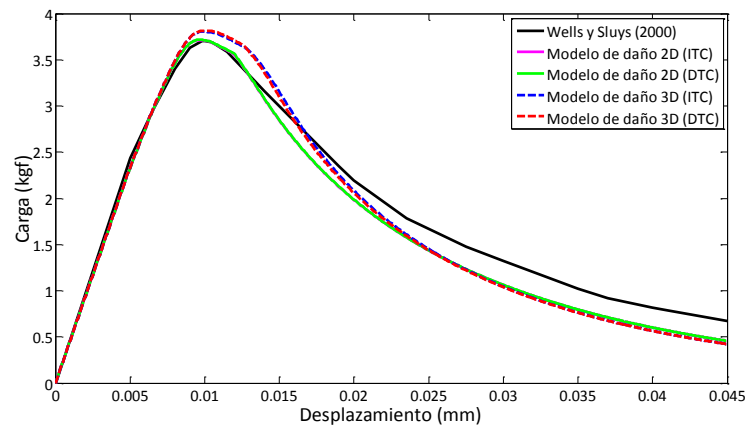


Figura 5.4 Diagramas carga vs desplazamiento

5.2 Viga de concreto simple con sección variable con dos ranuras

En este ejemplo se tiene una viga de concreto simple con sección transversal variable con dos ranuras ubicadas en la mitad de su longitud, sometida a un proceso de tensión uniaxial. La carga se induce en forma de desplazamientos aplicados gradualmente en el borde derecho en la dirección positiva del eje x . La geometría y las condiciones de frontera se observan en la figura 5.5. Las propiedades mecánicas son: módulo elástico $E = 16,900 \text{ MPa}$ ($172,332 \text{ kg/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2.4 \text{ MPa}$ (24.5 kg/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 24 \text{ MPa}$ (245 kg/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.3 \text{ N/mm}^2$ (3.1 kgf/cm^2). En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran la malla estructurada que consta para el caso en 2D de elementos cuadriláteros y para el caso en 3D de elementos hexaedros de ocho nodos. El daño inicia en los elementos ubicados en la vecindad de las ranuras. En la figura 5.8 se observa una comparación de los resultados obtenidos tanto en 2D como en 3D, contra los presentados por Contrafatto *et al.* (2007), quienes utilizaron un modelo de discontinuidades interiores; en estas figuras se observa que los resultados obtenidos son consistentes con los numéricos.

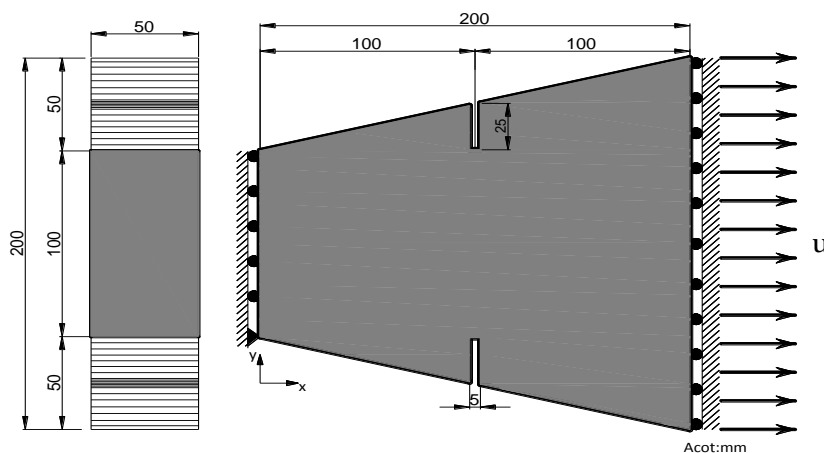


Figura 5.5 Geometría de viga de sección variable

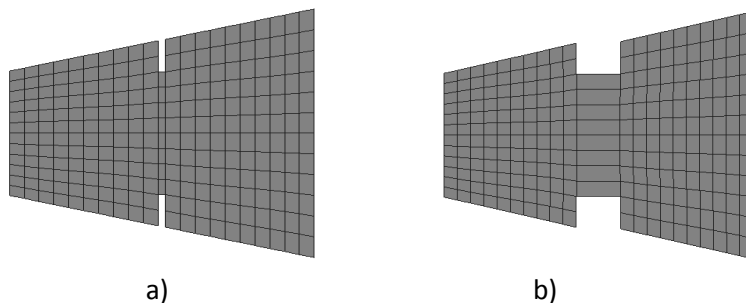


Figura 5.6 Malla en 2D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada

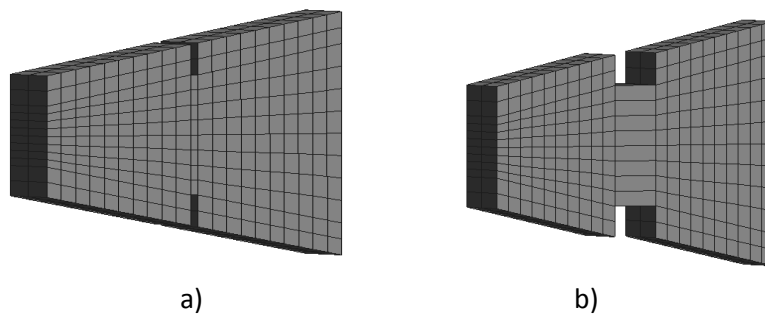


Figura 5.7 Malla en 3D para simulación con modelos de daño ITC y DTC: a) no deformada y b) dañada

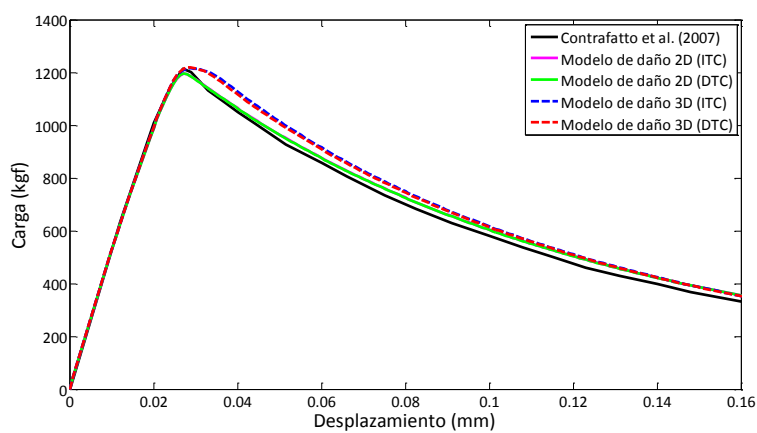


Figura 5.8 Diagramas carga vs desplazamiento

5.3 Bloque de concreto simple con ranurado circular

La figura 5.9 muestra la geometría y las condiciones de frontera de un bloque de concreto simple con una ranura circular ubicada en el centro de su longitud, sometido a un proceso de tensión en ambos sentidos. La carga se induce en forma de desplazamientos aplicados gradualmente y de manera simultánea en las paredes laterales de la ranura circular. Las propiedades mecánicas son: módulo elástico $E = 30,000 \text{ MPa}$ ($305,914.86 \text{ kg/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 3 \text{ MPa}$ (30.6 kg/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 30 \text{ MPa}$ (306 kg/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ (0.102 kgf/cm).

Las figuras 5.10 muestran la malla en 2D utilizada para la simulación empleando los modelos de daño ITC y DTC respectivamente, la cual consta de elementos triangulares de tres nodos con un sólo punto de integración de Gauss. Las figuras 5.11 muestran la malla en 3D utilizada para la simulación empleando los modelos de daño ITC y DTC respectivamente, la cual consta de elementos tetraedros de cuatro nodos. El daño inicia en la vecindad de la ranura vertical superior.

En la figura 5.12 se observa una comparación de los resultados obtenidos tanto en 2D como en 3D, contra los presentados por Vieira (2003), quien utilizó un modelo de discontinuidades interiores con un modelo de daño con degradación solo en tensión, en estas figuras se observa que los resultados obtenidos son consistentes con los numéricos. La diferencia en los resultados, se deben a que en el espécimen aparecen esfuerzos de compresión en la zona cercana al apoyo, algo que no considera el modelo de daño con degradación solo en tensión, y que sí considera el modelo de daño DTC. Además, la diferencia entre los modelos 2D y 3D DTC se debe a que en el segundo, el efecto de Poisson hace que los esfuerzos varíen en cada punto a lo ancho del espécimen.

En este ejemplo, los desplazamientos impuestos producen esfuerzos de tensión en los elementos circundantes de la ranura vertical superior propagándose hacia arriba conforme se daña la pieza, pero en la zona del apoyo producen esfuerzos de compresión. Cuando se emplea el modelo de daño ITC en 2D y en 3D, en cierta etapa del análisis, debido a los esfuerzos de compresión se produce un fenómeno de traslape o empalme de elementos, es decir, los elementos fallan en compresión a un esfuerzo igual al esfuerzo último en tensión del material. Dicha falla en compresión ocurre debido a que este modelo de daño considera que el estado de esfuerzos último que resiste el material es el mismo en tensión y en compresión, algo que no es real para materiales como el concreto, donde la resistencia en compresión es generalmente diez veces mayor que en tensión. Estas fallas se resuelven al hacer la simulación en 2D y en 3D utilizando el modelo de daño DTC.

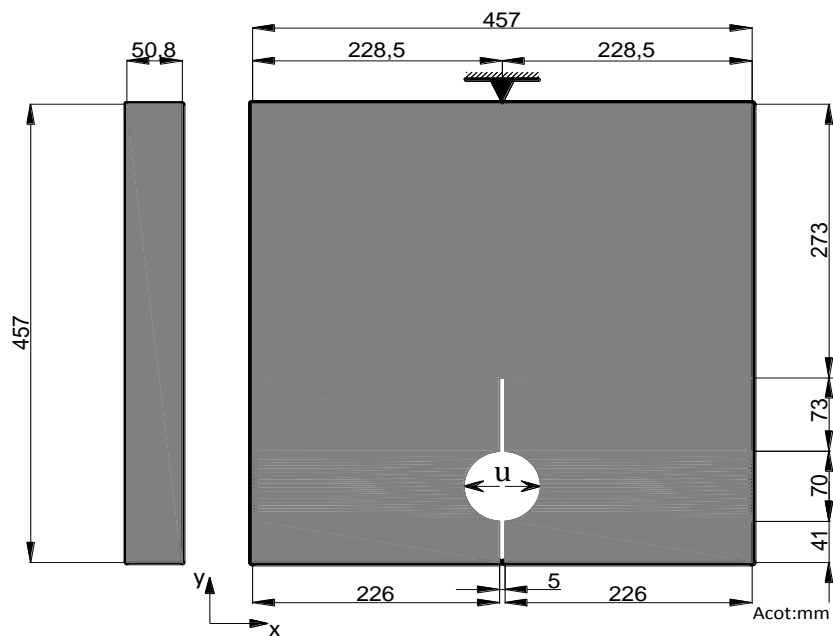
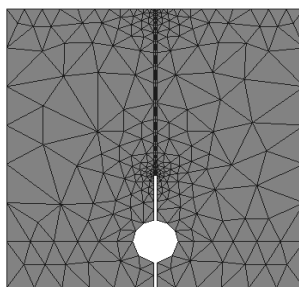
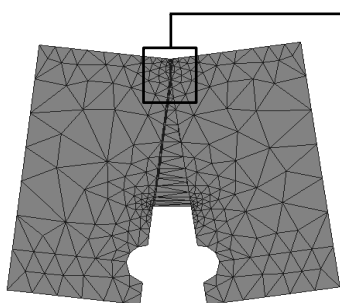


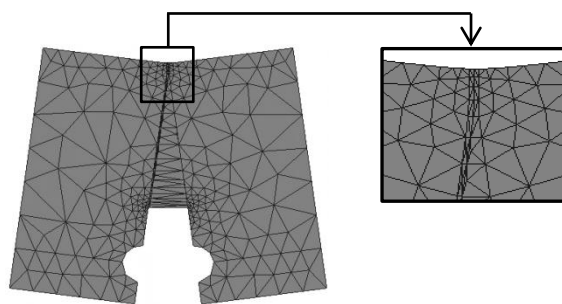
Figura 5.9 Geometría de bloque con ranura circular



a)



b)



c)

Figura 5.10 Malla en 2D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC)

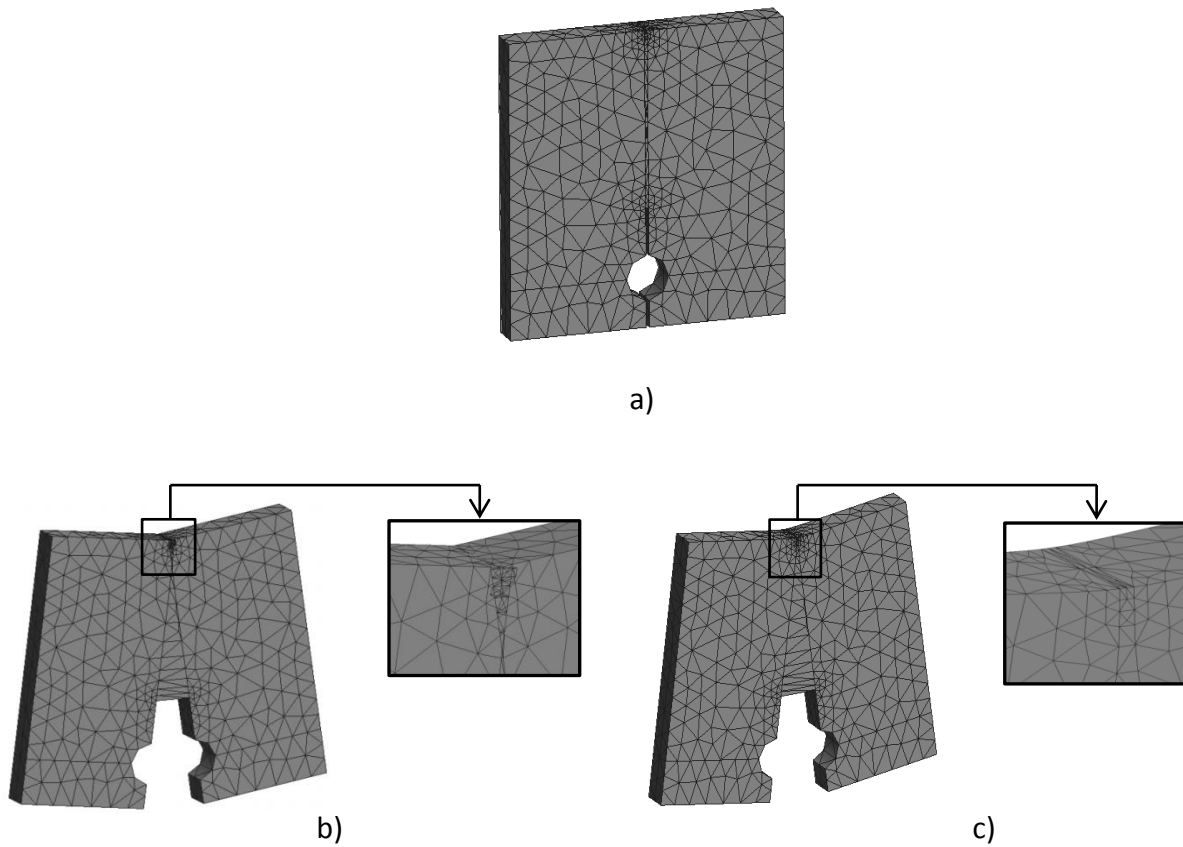


Figura 5.11 Malla en 3D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC)

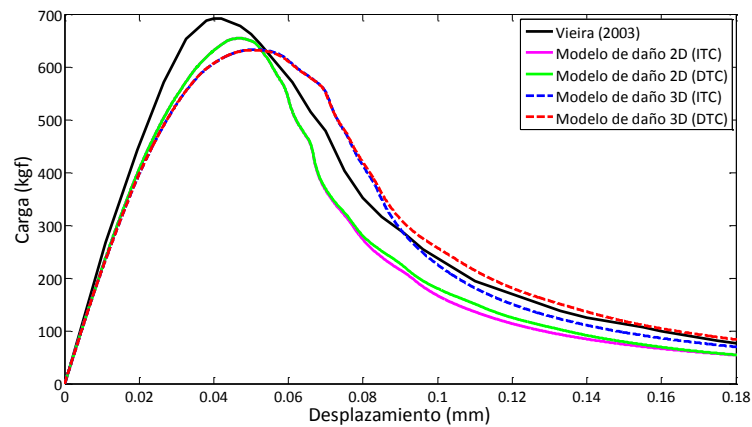


Figura 5.12 Diagramas carga vs desplazamiento

5.4 Viga simplemente apoyada con sección constante y con ranura

Una viga simplemente apoyada de concreto simple con dimensiones y condiciones de frontera indicadas en la figura 5.13, se somete a una carga en el centro del claro que se induce mediante desplazamientos aplicados gradualmente en la dirección negativa del eje y . Las propiedades mecánicas son: módulo elástico $E = 20,000 \text{ Mpa}$ ($203,943.3 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2.4 \text{ Mpa}$ (24.5 kgf/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 24 \text{ MPa}$ (245 kgf/cm^2), energía de fractura $G_f = 113 \text{ J/m}^2$ (0.3 kgfm/cm^2).

Las figuras 5.14 muestran la malla en 2D utilizada para la simulación empleando los modelos de daño ITC y DTC respectivamente, la cual consta de elementos cuadriláteros de cuatro nodos. Las figuras 5.15 muestran la malla en 3D utilizada en la simulación empleando los modelos de daño ITC y DTC respectivamente, la cual está formada de elementos hexaedro de ocho nodos. El daño inicia en los elementos ubicados en la vecindad de la ranura.

En la figura 5.16 se observa una comparación de los resultados obtenidos tanto en 2D como en 3D, contra una serie de resultados experimentales presentados por Kormeling y Reinhardt (1993) donde variaron el esfuerzo máximo a tensión como la energía de fractura del material, dicha zona es acotada por dos curvas y un achurado, en estas figuras se observa que los resultados obtenidos son consistentes con los experimentales para el caso del modelo de daño DTC.

En este ejemplo también se observa el fenómeno de traslape o empalme de los elementos sometidos a esfuerzo de compresión tanto para la simulación en 2D como para la 3D al utilizar el modelo de daño ITC, lo que ocasiona que para ambas simulaciones la carga máxima que puede soportar la viga de concreto simple se subestime. Este problema se soluciona al emplear el modelo de daño DTC.

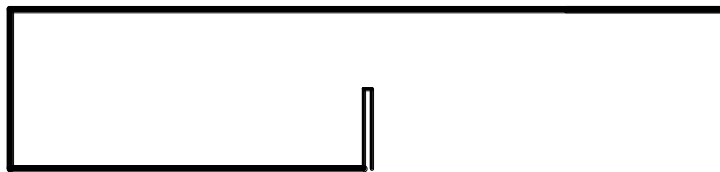


Figura 5.13 Geometría de viga simplemente apoyada

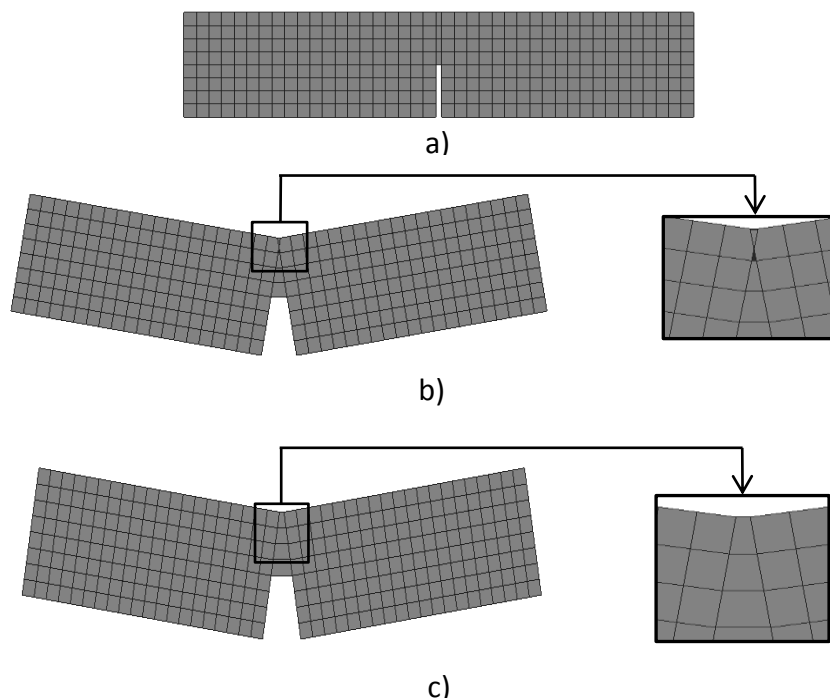


Figura 5.14 Malla en 2D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC)

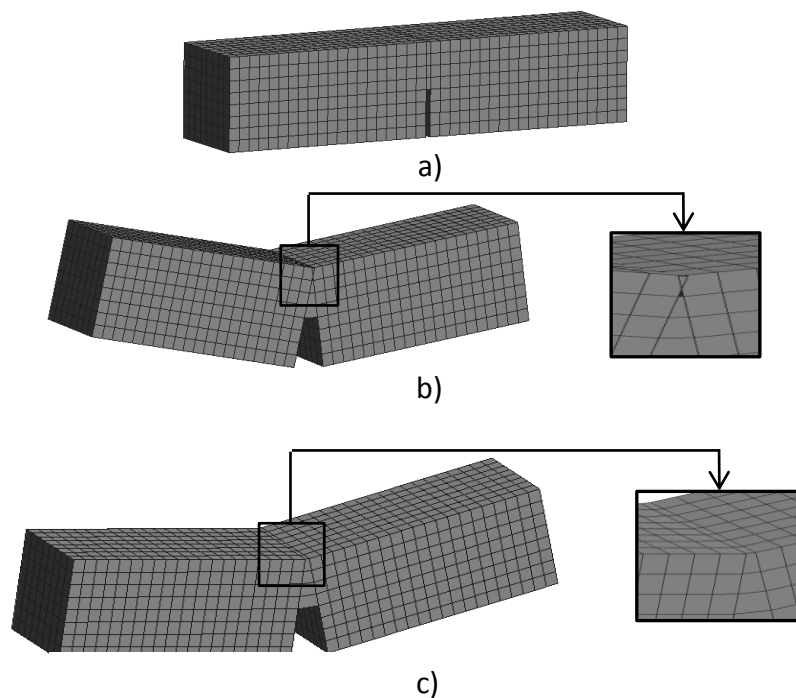


Figura 5.15 Malla en 3D: a) no deformada, b) dañada con traslape (ITC) y c) dañada sin traslape (DTC)

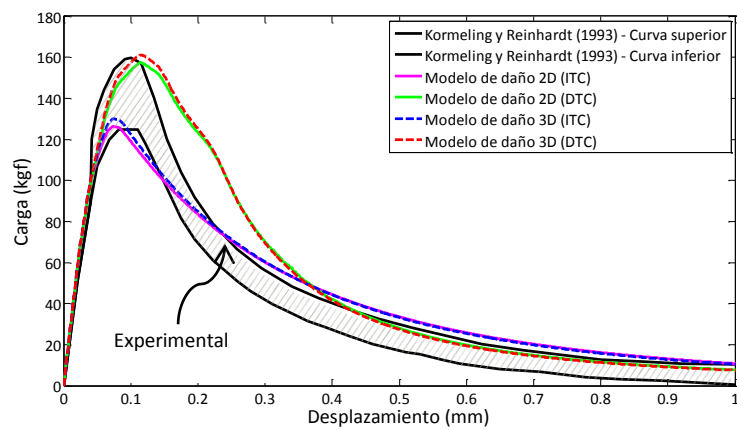


Figura 5.16 Diagramas carga vs desplazamiento

5.5 Bloque de concreto con varilla de refuerzo embebida

En este ejemplo se tiene un bloque de concreto con una barra de refuerzo de una pulgada de diámetro embebida, sometido a un proceso de tensión uniaxial. La carga de tensión se induce en forma de desplazamientos aplicados gradualmente en la barra de refuerzo. La geometría se observa en la figura 5.17. Las propiedades del concreto son: módulo elástico $E = 26,000 \text{ MPa}$ ($265,126 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 3 \text{ MPa}$ (30.6 kgf/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 30 \text{ MPa}$ (306 kgf/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.01 \text{ Nm/mm}^2$ (0.1 kgfm/cm^2). Las propiedades del acero de refuerzo son: módulo elástico $E = 200 \text{ GPa}$ ($2,039,432.43 \text{ kgf/cm}^2$), esfuerzo de fluencia $f_y = 470 \text{ MPa}$ ($4,792.7 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.3$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 520 \text{ MPa}$ ($5,302.5 \text{ kgf/cm}^2$), área $A = 5.07 \text{ cm}^2$, módulo de endurecimiento $= 6,832.1 \text{ kgf/cm}^2$, deformación a la que inicia el endurecimiento por deformación 2.2%.

En la figura 5.18 se muestra la malla estructurada en 3D que, por simetría del bloque, se modeló sólo una cuarta parte, la malla está formada de elementos hexaedro de ocho nodos. La figura 5.19 muestra los desplazamientos en dirección de aplicación de la carga, observándose claramente un cono de falla en la parte vecina a la barra. En la figura 5.20 se observa una comparación de los resultados numéricos obtenidos, con los presentados por Goto (1972) como resultado de un proceso experimental, en esta figura se observa que los resultados obtenidos son consistentes con los experimentales. En la curva experimental de la figura 5.20 se observan dos puntos en los que ocurre una pequeña pérdida de carga del sistema que corresponden a la formación de zonas de agrietamiento (Nicole, 1999).

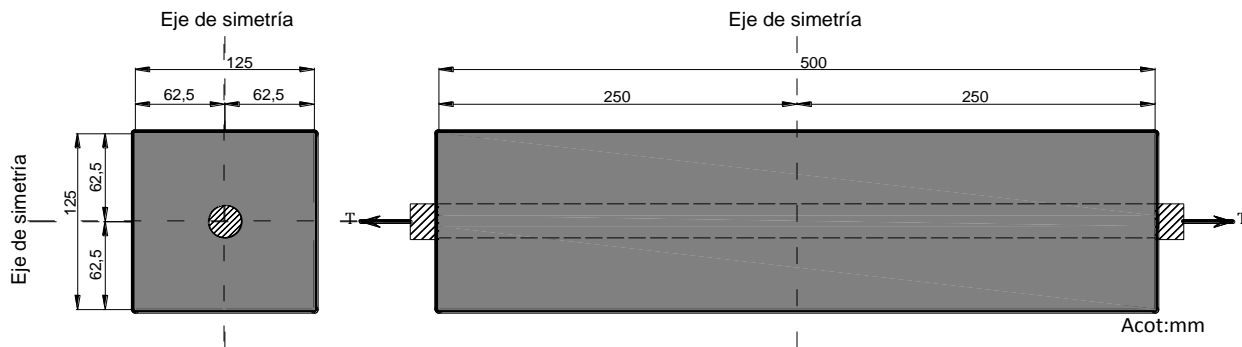


Figura 5.17 Geometría de bloque con barra embebida

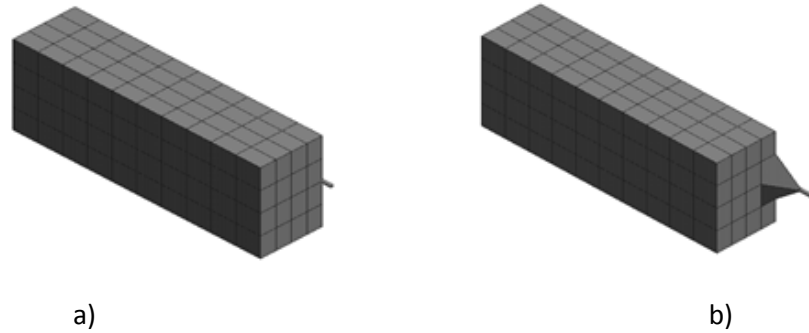


Figura 5.18 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada

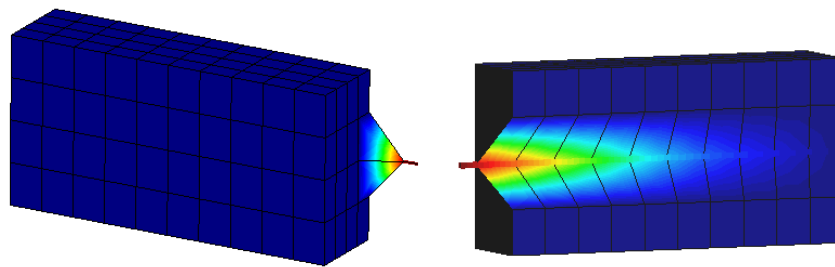


Figura 5.19 Desplazamientos en la dirección de aplicación de la tensión

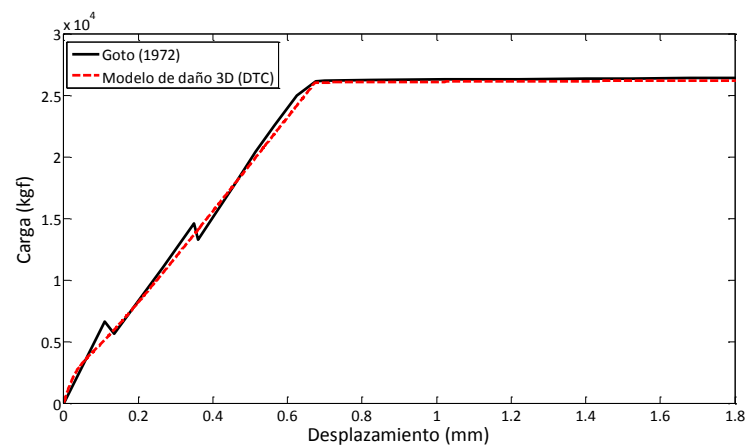


Figura 5.20 Diagramas carga vs desplazamiento

5.6 Viga simplemente apoyada de concreto ligeramente reforzada

En este ejemplo se presenta una viga simplemente apoyada de concreto reforzado con dimensiones, refuerzo y condiciones de frontera indicadas en la figura 5.21, la cual se somete a una carga en el centro del claro que se induce mediante desplazamientos aplicados gradualmente en la dirección negativa del eje y . Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo elástico $E = 24,132 \text{ Mpa}$ ($246,074.35 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2.41 \text{ Mpa}$ (24.61 kgf/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 33.23 \text{ MPa}$ (338.89 kg/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.263 \text{ N/mm}$ (0.268 kgf/cm). Las propiedades del acero de refuerzo son: módulo elástico $E = 203.4 \text{ GPa}$ ($2,074,055 \text{ kgf/cm}^2$), esfuerzo de fluencia $f_y = 324 \text{ MPa}$ ($3,304.4 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.3$, área $A = 5.07 \text{ cm}^2$, módulo de endurecimiento $= 7,030.7 \text{ kgf/cm}^2$, deformación a la que inicia el endurecimiento por deformación 1%.

La figura 5.22 muestra la malla estructurada en 3D que, por simetría de la viga y para reducir el costo computacional, se modeló solo una cuarta parte, dicha malla se compone de elementos hexaedro de ocho nodos, en esta figura se observa que el daño se concentra en los elementos mas deformados ubicados cerca del centro del claro, lo cual es consistente con los resultados experimentales reportados por Burns y Seiss (1962). En la figura 5.23 se observa una comparación de la curva carga-desplazamiento obtenida contra la curva obtenida por Burns y Seiss (1962) como resultado de una investigación experimental. En dicha figura se observa que los resultados son consistentes con los numéricos.

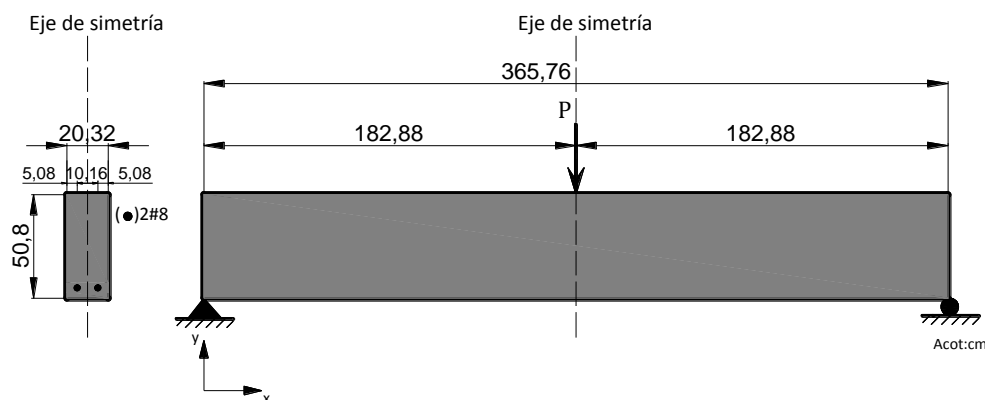


Figura 5.21 Geometría y refuerzo de viga simplemente apoyada

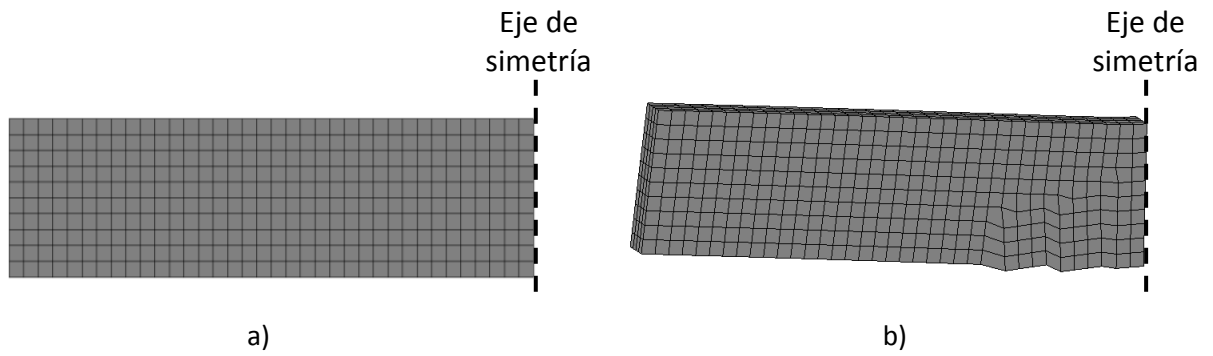


Figura 5.22 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada

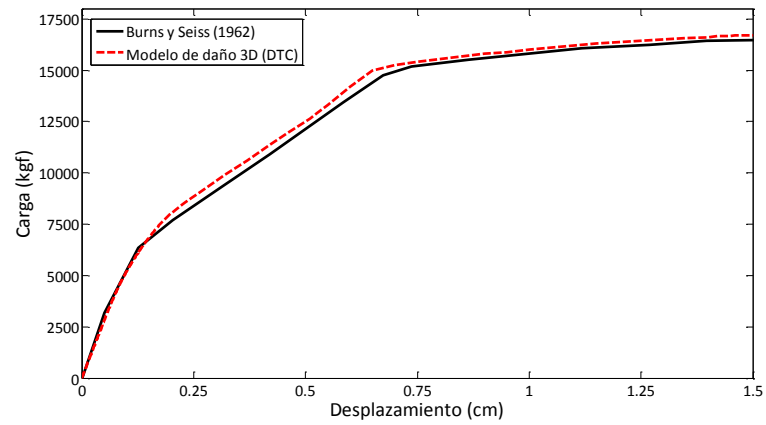


Figura 5.23 Diagramas carga vs desplazamiento

5.7 Losa circular de concreto reforzado

Este ejemplo abarca la simulación de una losa de concreto reforzado de forma circular con espesor de 10 cm, sometida a una carga uniformemente distribuida (presión) aplicada gradualmente en la dirección negativa del eje z . Primero se considera como simplemente apoyada y, posteriormente, como empotrada. La geometría y el refuerzo de la losa se muestran en la figura 5.24. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo elástico $E = 14,710 \text{ Mpa}$ ($150,000 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2.45 \text{ Mpa}$ (25 kgf/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 29.42 \text{ MPa}$ (300 kg/cm^2) energía de fractura $G_f = 0.098 \text{ N/mm}$ (0.1 kgf/cm). Las propiedades del acero de refuerzo son: módulo elástico $E = 196.13 \text{ GPa}$ ($2,000,000 \text{ kgf/cm}^2$), esfuerzo de fluencia $f_y = 411.88 \text{ MPa}$ ($4,200 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.3$, área $A = 0.71 \text{ cm}^2$, módulo de endurecimiento = $29,277 \text{ kgf/cm}^2$.

Debido a la simetría de la losa, sólo se modeló una cuarta parte y así reducir el costo computacional. La figura 5.25 muestra la malla en 3D utilizada en las simulaciones, la cual se compone de elementos hexaedro de ocho nodos.

En las figuras 5.26 y 5.27 se observa una comparación de la curva carga-desplazamiento obtenida contra la curva obtenida por Caballero (2011) como resultado de aplicar la formulación de agrietamiento distribuido incluido en la librería del software especializado ANSYS. En dichas figuras se observa que ambos resultados numéricos son consistentes.

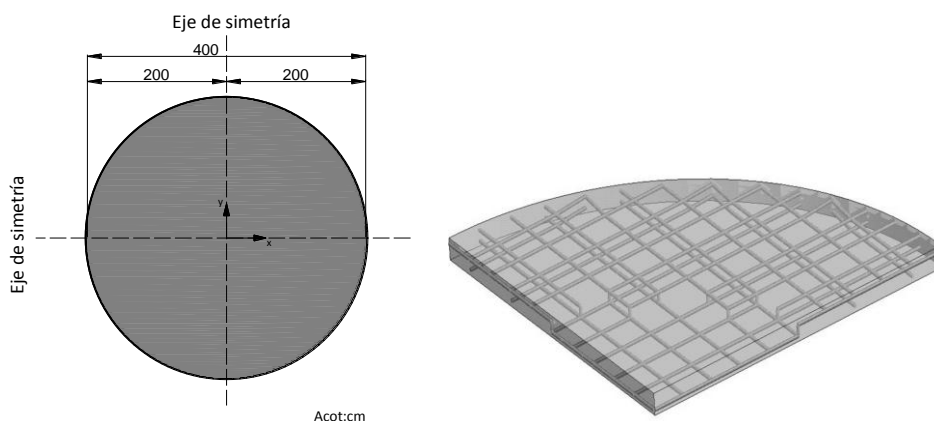


Figura 5.24 Geometría y refuerzo de losa circular

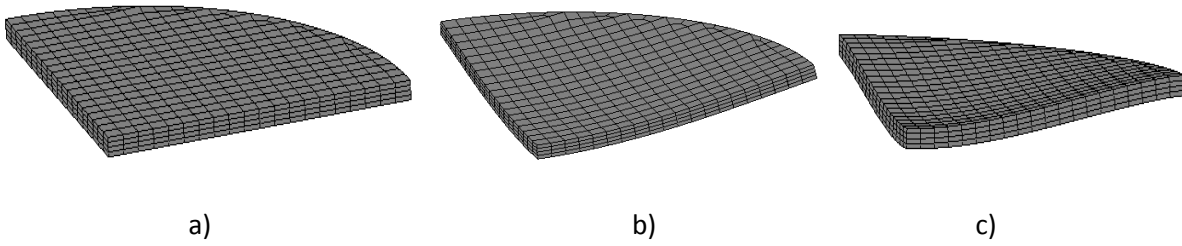


Figura 5.25 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada, b) dañada (simplemente apoyada) y c) dañada (empotrada)

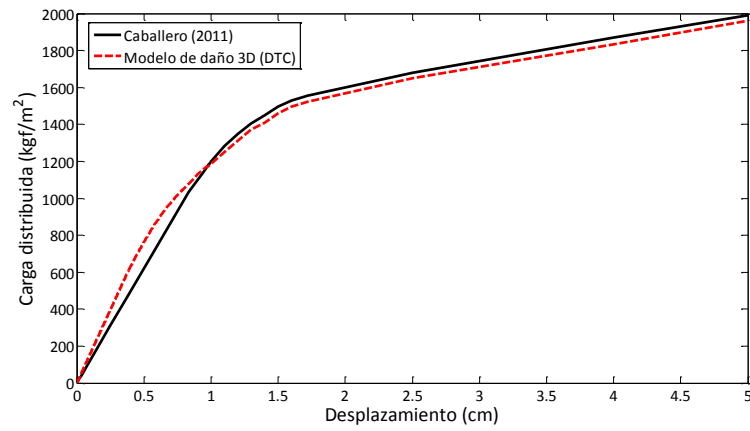


Figura 5.26 Diagramas carga vs desplazamiento (simplemente apoyada)

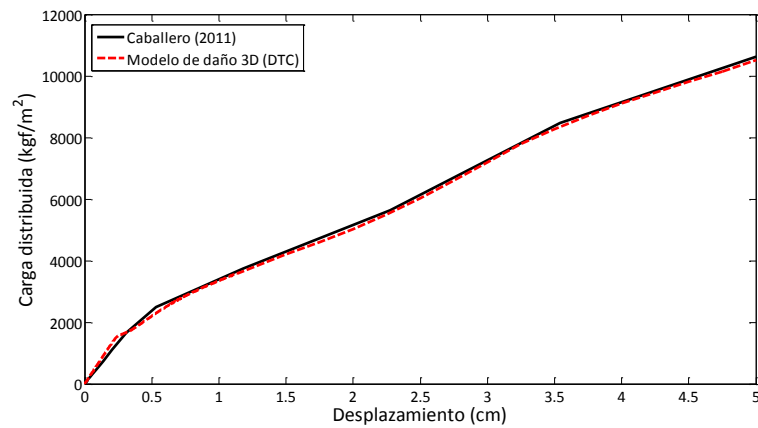


Figura 5.27 Diagramas carga vs desplazamiento (empotrada)

5.8 Viga de concreto reforzado de gran peralte

En este ejemplo se presenta una viga de concreto reforzado de gran peralte ($l/h = 1$), sometida a una carga uniformemente distribuida cuya magnitud es q (kgf/cm) = $0.0078125 P$, aplicada gradualmente en la dirección negativa del eje y . La geometría y el refuerzo de esta viga se muestran en la figura 5.28. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo elástico $E = 31,400 \text{ Mpa}$ ($320,191 \text{ kgf/cm}^2$), relación de Poisson $\nu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2.5 \text{ Mpa}$ (26 kgf/cm^2), esfuerzo máximo a compresión $\sigma_c = 29.63 \text{ MPa}$ (302.1 kg/cm^2), energía de fractura $G_f = 0.098 \text{ N/mm}$ (0.1 kgf/cm). Las propiedades del acero de refuerzo son: módulo elástico $E = 206 \text{ GPa}$ ($2,100,615 \text{ kgf/cm}^2$), esfuerzo de fluencia $f_y = 536.6 \text{ MPa}$ (5471.8 kgf/cm^2), relación de Poisson $\nu = 0.3$, área de acero principal $A = 0.503 \text{ cm}^2$, área de acero secundario $A = 0.178 \text{ cm}^2$, en este ejemplo se considera para el acero un modelo constitutivo elastoplástico perfecto como se consideró en Leonhardt y Walther (1966).

Debido a la simetría de la viga, solo se modeló una cuarta parte para reducir el tiempo de análisis y el costo computacional. La figura 5.29 muestra la malla en 3D utilizada en las simulaciones, la cual se compone de elementos hexaedro de ocho nodos.

En la figura 5.30 se observa una comparación de la curva carga-desplazamiento obtenida contra la curva obtenida por Leonhardt y Walther (1966) como resultado de una investigación experimental de este tipo de vigas. En dicha figura se observa que los resultados numéricos son consistentes con los experimentales.

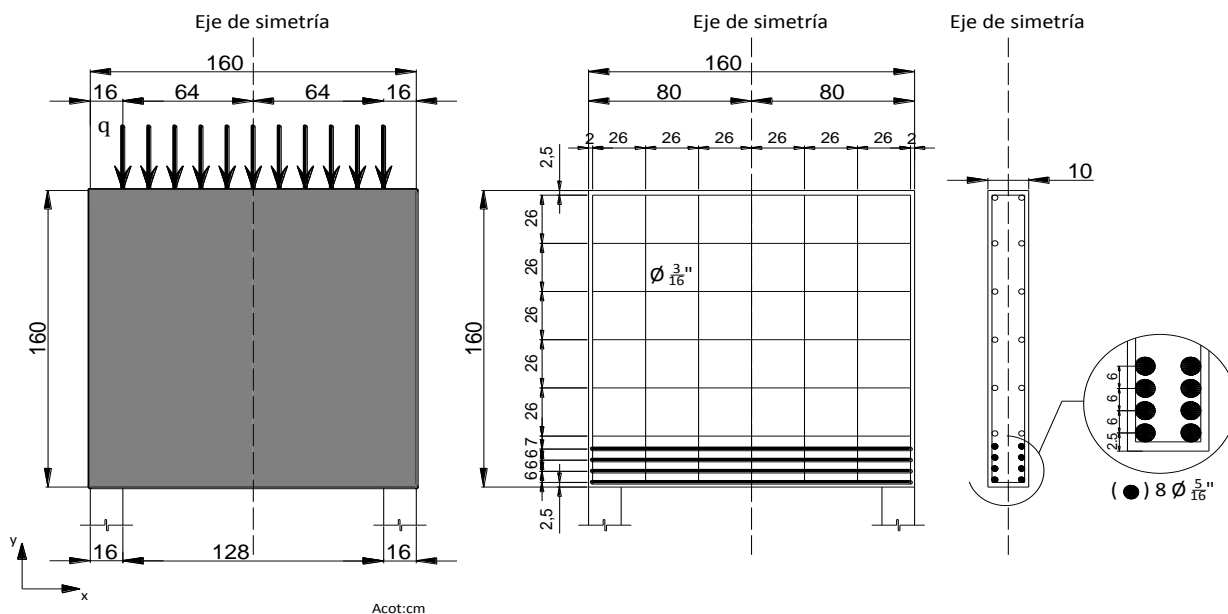


Figura 5.28 Geometría y refuerzo de viga de gran peralte

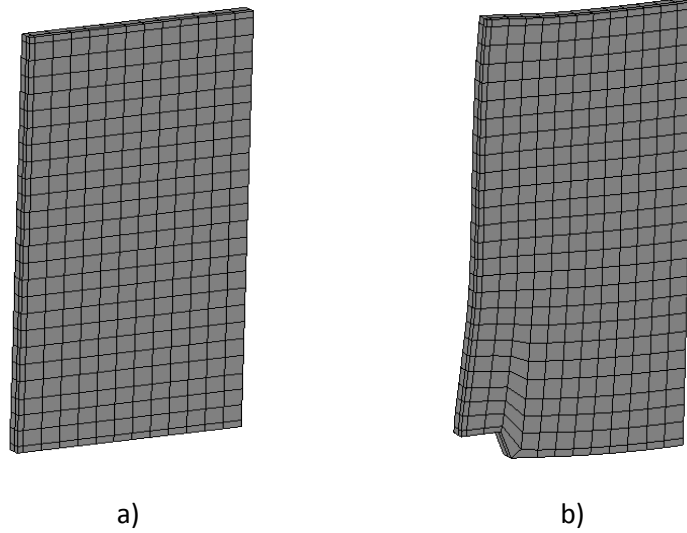


Figura 5.29 Malla en 3D para simulación con modelo de daño DTC: a) no deformada y b) dañada

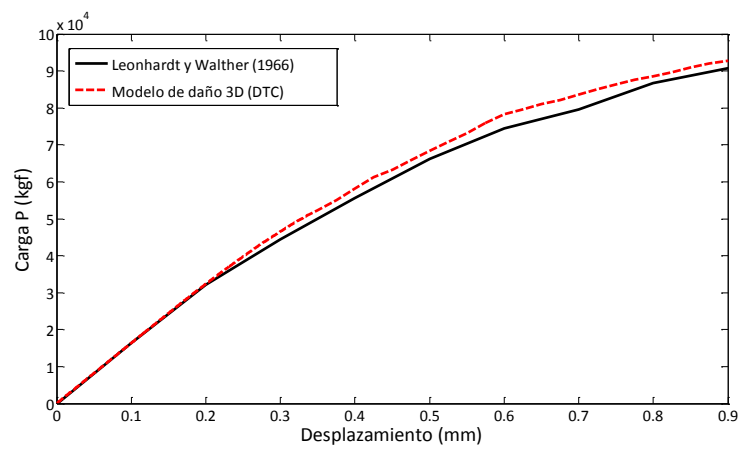


Figura 5.30 Diagramas carga vs desplazamiento

CAPÍTULO 6

Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

En este trabajo de tesis, se formularon, implantaron y validaron dos modelos de daño, ITC y DTC, tanto en 2D como en 3D, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- a) Con base en los resultados obtenidos se concluye que el uso de análisis numéricos empleando los modelos de daño desarrollados en este trabajo son de utilidad para el estudio de elementos de concreto simple y reforzado, pues permite simular de manera adecuada dichos elementos en su evolución al colapso.
- b) Al utilizar el modelo de daño con superficies de fluencia ITC ya sea en 2D o en 3D, en problemas donde las fuerzas externas produzcan esfuerzos de compresión en el elemento, se produce un aplastamiento prematuro en la zonas en compresión que provoca una inconsistencia en la determinación de la carga de colapso en comparación con los resultados reportados en la literatura. Lo que nos lleva a concluir que en este tipo de problemas no es conveniente utilizar dicho modelo de daño.
- c) El problema del aplastamiento prematuro se solucionó al realizar los análisis numéricos utilizando el modelo de daño con superficies de fluencia DTC, con lo que se concluye que éste modelo de daño debe utilizarse para problemas donde las fuerzas externas produzcan cualquier estado de esfuerzos en el elemento.
- d) Los resultados numéricos obtenidos con el modelo constitutivo del concreto con superficie de fluencia DTC, son consistentes con los resultados experimentales y numéricos reportados en la literatura, pues se observó que simula adecuadamente el ablandamiento que presenta el concreto y localiza adecuadamente las zonas de degradación.
- e) Cuando se simula elementos de concreto reforzado, el comportamiento global lo rige el endurecimiento por deformación que sufre el acero de refuerzo.
- f) La simulación de elementos de concreto reforzado empleando los modelos de daño para el concreto y de plasticidad para el acero permiten conocer las zonas donde aparecen los agrietamientos, sus trayectorias y en particular la carga última que soporta un elemento.
- g) El uso de la hipótesis de adherencia perfecta en elementos de concreto reforzado no produjo efectos significativos en los análisis presentados, pues en su mayoría están dominados por la flexión.

- h) En el modelo implantado es posible asignar el valor de la energía de fractura, obtenido de experimentos de laboratorio reportados en la literatura, del cual son dependientes los resultados numéricos.
- i) La convergencia en los análisis numéricos se da de una manera rápida cuando se trata de elementos de concreto simple, pero se complica bastante cuando se trata de elementos de concreto reforzado, esto debido a que son dos materiales distintos con un comportamiento constitutivo totalmente diferente.
- j) Los modelos implementados en 2D y 3D no presentan problemas de atoramiento de esfuerzo como el modelo de agrietamiento distribuido, lo que garantiza simular en forma adecuada estructuras de concreto reforzado en su evolución al colapso.

6.2 Recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos, se hacen las siguientes recomendaciones:

- a) Cuando sea posible, se recomienda realizar los análisis numéricos en 3D, pues aunque se requiera más trabajo, se obtiene una mejor comprensión y apreciación de los resultados.
- b) Utilizar el modelo de daño DTC para cualquier análisis, ya que éste modelo considera la diferencia que existe en la capacidad del concreto a tensión y compresión.
- c) Es importante aprovechar al máximo la simetría de los especímenes a analizar, ya que se disminuye no sólo el tiempo y el costo computacional de los análisis, sino también los problemas de convergencia. Obteniendo los mismos resultados que si se utilizara un modelo completo.
- d) Es preferible utilizar mallas estructuradas y refinadas en zonas de concentración de esfuerzo o de deformación.
- e) Se mejora la solución al utilizar elementos del tipo hexaedro en lugar de elementos tetraedro en mallas con el mismo número de nodos, por lo que es importante que en cualquier análisis, se realice la malla con este tipo de elementos.

6.3 Trabajos futuros

Algunos de los trabajos a realizarse en un futuro son:

- a) Aplicar el efecto de corrimiento en la interfaz del acero de refuerzo y el concreto reforzado.
- b) Elaborar y realizar un programa experimental para, posteriormente, comprobar dichos resultados con análisis numéricos.
- c) Desarrollo de ejemplos con otro tipo de elementos de concreto como: Ménsulas y muros.
- d) Incluir efectos dinámicos en el modelo de daño, que incluyan el análisis ante cargas cíclicas.

Referencias

- [1] **Ahmad S.H. y Shah S.P. (1982).** "Complete Triaxial Stress-Strain Curves for Concrete.", ASCE Journal of the Structural Division 108 (ST4), pp. 728-742.
- [2] **Ansys (2009).** "Ansys 12.0.1". *Ansys Inc. Estados Unidos*.
- [3] **Armstrong P.J. y Frederick C.O. (1966).** "A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect", Rd/b/n 731, C.E.G.B.
- [4] **Backhaus G. (1968).** "Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik", pp. 48-99.
- [5] **Bahn B.Y. y Hsu. C.T.T. (1998).** "Stress-Strain Behavior of Concrete under Cyclic Loading.", ACI Materials Journal 95 (2), pp. 178-193.
- [6] **Barbat A., Oller S., Oñate E. y Hanganu A. (1997).** "Viscous Damage Model for Timoshenko Beam Structures", International Journal Solids and Structures, Vol.34, No.30, pp. 3953-3976.
- [7] **Bauschinger J. (1881).** "Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls Verschiedener Metalle", Civilingenieur, pp. 289-348.
- [8] **Bazant Z. P. y Planas J. (1998).** "Fracture and Size Effect in Concrete an others Cuasibrittle Materials", CRC Press, Boca Raton, Florida, Estados Unidos.
- [9] **Bazant Z. y Oh B.H. (1983).** "Crack Band Theory for Fracture of Concrete.", Material Construction (RILEM) 16, pp. 155-177.
- [10] **Blaauwendraad J. y Grootenboer H.J. (1981).** "Essentials for Discrete Crack Analysis", IABSE Reports 34, Coll. Advanced Mech. of Reinforced Concrete, Delft Univ. Press, Holanda, pp. 263-272.
- [11] **Burns N. H. y Seiss C. P. (1962).** "Load-Deformation Characteristics of Beam-Column Connections in Reinforced Concrete." Technical Report Civil Engineering Studies, SRS No. 234, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, Estados Unidos.

-
- [12] **Caballero O. (2011).** "Determinación de Coeficientes de diseño y Trayectorias de Agrietamiento de Losas Circulares, Elípticas y Triangulares en Condición Aislada." Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, México.
- [13] **Carol I., Rizzi E. y Willam K. (2001a).** "On the Formulation of Anisotropic Elastic Degradation , Part I: Theory Based on a Pseudo-Logarithmic Damage Tensor Rate", Int. J. Solids Struct. Vol. 38 (4), pp. 491-518.
- [14] **Carol I., Rizzi E. y Willam K. (2001b).** "On the Formulation of Anisotropic Degradation II. Generalized Pseudo Rankine Model for Tensile Damage", International Journal of solids and Structures, Vol. 38, pp. 519-543.
- [15] **Chaboche J.L. (1992).** "Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with Active/Passive Unilateral Condition", International Journal of Damage Mechanics, Vol.1, No. 2, pp. 148-171.
- [16] **Chaboche J.L. (1993).** "Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage", Int. Journal of Damage Mechanics, Vol.2, pp.311-329.
- [17] **Chaboche J.L. (1995).** "A Continuum Damage Theory with Anisotropic and Unilateral Damage", La Recherche Aéronautique, No.2, pp. 139-147.
- [18] **Chen A.T.C. y Chen W.F. (1975).** "Constitutive Relations for Concrete.", ASCE Journal of Engineering Mechanics 101 (4), pp. 465-481.
- [19] **Contrafatto L., Cuomo M. y Micciché M. L. (2007).** "A intra-element discontinuities approach for modelling cohesive fracture processes.", En *Proceedings XVIII AIMETA*, National Congress, 11-14 September 2007, Brescia, Italia, pp. 11-14.
- [20] **Cope R.J., Rao P.V., Clark L.A. y Norris P. (1980).** "Modelling of Reinforced Concrete Behaviour for Finite Element Analysis of Bridge Slabs", Numerical Methods for Nonlinear problems 1, Taylor C. et al. (Eds.), Pineridge Press, Swansea, pp. 457-470.
- [21] **Cordebois J. P. y Sidoroff F. (1979).** "Damage-Induced Elastic Anisotropy, in Mechanical Behavior of Anisotropic Solids", Colloque Euromech 115, Dordrecht, Holanda, pp. 761-774.

- [22] **Crisfield M.A. (1986).** "Snap-Through and Snap-Back Response in Concrete Structures and the Dangers of Under Integration.", *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 22, pp. 751-756.
- [23] **de Boer R. y Dresenkamp H.T. (1989).** "Constitutive Equations for Concrete in Failure State.", *Journal of Engineering Mechanics* 115 (8), pp. 1591-1608.
- [24] **de Borst R. y Nauta P. (1985).** "Non-orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model", *Engng. Computations* 2, pp. 35-46.
- [25] **Drucker D.C., Gibson R.E. y Henkel D.J. (1975).** "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity.", *Trans. ASCE*. 122, pp. 338-346.
- [26] **Leonhardt F. y Walther R. (1966).** "Wandartige Triiger." *Df. Aussch. Stahlbeton, Vol. 178*, pp. I-113.
- [27] **Faria R., Oliver J. y Cervera M. (1998).** "A strain-Based Plastic Viscous-Damage Model for Massive Concrete Structures", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol 35, No. 14. Pp. 1533-1558.
- [28] **Fernández L. (2002).** "Modelado Numérico de la Fractura en el Concreto", Tesis de doctorado, UNAM, México.
- [29] **Frantziskonis G. y Desai C.S. (1987).** "Constitutive Model with Strain Softening.", *International Journal of Solids and Structures* 23 (6), pp. 733-750.
- [30] **Gerstle K.H. (1981).** "Simple Formulation of Triaxial Concrete Behavior.", *ACI Journal* 78 (5), pp. 382-387.
- [31] **Goto Y. (1972).** "Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars." *ACI Journal*, Vol. 68(4), pp. 244-251.
- [32] **Govindjee S., Kay G.J. y Simo J.C. (1995).** "Anisotropic Modelling and Numerical Simulation of Brittle Damage in Concrete.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (21), pp. 3611-3633.

-
- [33] **Govindjee S. y Hall G. (1997).** "A Local Integration Method for Coupled Damage and Plasticity." Report UCB/SEMM-98/01, SEMM University of California, Berkeley, Estados Unidos.
- [34] **Griffith A. A. (1921).** "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids". Philos. T. Roy. Soc. A., vol. 221, pp. 163-197.
- [35] **Gurson A. L. (1977).** "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth – I. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media.", Journal of Engineering Materials and Technology, ASME Vol. 99, pp. 2-15.
- [36] **Han D.J. y Chen W.F. (1985).** "A Non-Uniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials.", Journal of Mechanics of Materials 4 (4), pp. 283-302.
- [37] **Hanganu A., Oñate E. y Barbat A. (2002).** "A Finite Element Methodology for Local/Global Damage Evaluation in Civil Engineering Structures", Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1667–1687.
- [38] **Hillerborg A., Modeer M. y Petersson P.E. (1976).** "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", Cement and Concrete Research 6(6), pp. 773-782.
- [39] **Imran I. y Pantazopoulou S.J. (1996).** "Experimental Study of Plain Concrete under Triaxial Stress." ACI Materials Journal, Vol. 93, pp. 589-601.
- [40] **Ingraffea A.R. y Saouma V. (1985).** "Numerical Modeling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete", Fracture Mechanics of Concrete, Sih G.C. y DiTomaso A. (Eds.), Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, pp. 171-225.
- [41] **Ju J. W. (1989).** "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects", Int. Journal Solids Structures Vol.25, No.7, pp. 803-833.
- [42] **Juárez G. (2006).** "Modelado Numérico de Problemas de Fractura en Solidos Mediante Discontinuidades Interiores", Tesis de Doctorado, UNAM, México, pp. 39-46.
- [43] **Kachanov L. M. (1958).** "Time of the Rupture Process Under Creep Conditions", IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk 8.

-
- [44] **Kormeling H.A. y Reinhardt H.W. (1983).** "Determination of the Fracture Energy of Normal Concrete and Epoxy Modified Concrete." Stevin Laboratory. Delft University of Technology. Report No. 5-83-18, Delft, Holanda.
- [45] **Kosaka Y., Tanigawa Y. y Hatanaka S. (1984).** "Inelastic Deformational Behavior of Axially Loaded Concrete under Low Material Confining Stresses.", Transactions of the Japan Concrete Institute 6, pp. 263-270.
- [46] **Krajcinovic D. y Fonseka U. (1981).** "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part I and II", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.48, pp. 809-824.
- [47] **Kupfer H., Hilsdorf H.K. y Rusch H. (1969).** "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses.", ACI Journal 66 (8), pp.656-666.
- [48] **Lee Y.H. y Willam K. (1997).** "Mechanical Properties of Concrete in Uniaxial Compression.", ACI Materials Journal 94 (6), pp. 457-471.
- [49] **Lehmann T. (1972).** "Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen", Ingenieur-Archiv, Vol. 41, pp. 297-310.
- [50] **Lemaitre J. (1986).** "A Course on Damage Mechanics", Springer Verlag, Berlin, Alemania.
- [51] **Lemaitre J. y Chaboche J. L. (1978).** "Aspecta Phenoménologique de la Rupture par Endommagement", Journal of Mecanique Théorique et Appliquée, pp. 317-365.
- [52] **Lemaitre J., Desmorat R. y Sauzy M. (2000).** "Anisotropic Damage Law of Evolution", Eur. J. Mech. A/Solids 19, pp. 187-208.
- [53] **Lemaitre J. y Chaboche J.L. (1990).** "Mechanics of Solid Materials", Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- [54] **Lévy M. (1870).** "Mémoire sur des équations générales des mouvements intérieures des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.", C.R. Acad. Arts Sci., 70:1323.
- [55] **Litton R.W. (1974).** "A Contribution to the Analysis of Concrete Structures Under Cyclic Loading", Dissertation, University of California, Berkeley, Estados Unidos.

-
- [56] **Lubliner J., Oliver J., Oller S. y Oñate E. (1989).** "A Plastic-Damage Model for Concrete", International Journal Solids Structures, Vol. 25, pp. 299-326.
- [57] **Luccioni B. (2003).** "Apuntes de la asignatura de daño continuo". Tucumán, Argentina.
- [58] **Luccioni B., Oller S. y Danesi R. (1996).** "Coupled Plastic-Damaged Model", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 129, pp. 81-89.
- [59] **Luccioni B.M. (1993).** "Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos", Ph.D. Tesis- Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
- [60] **Luege M., Luccioni B. y Danesi R. (2002).** "Modelo de Daño Dependiente de la Velocidad de Deformación", Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.18, 2, 3-17, UPC, Barcelona, España, pp. 411-431.
- [61] **Maekawa K., Pimanmas A. y Okamura H. (2003).** "Nonlinear Mechanics of Reinforced concrete", Spon Press, pp. 3-173, 383-429, 565-647, Reino Unido.
- [62] **Martín O. (2001).** "Modelo de Daño Anisótropo", Ph.D. Tesis - Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
- [63] **Mazars J. (1982).** "Mechanical Damage and Fracture of Concrete Structures", Advances in Fracture research (Fracture 81), Vol.4, pp. 1499-1506. Pergamon Press, Oxford, Reino Unido.
- [64] **Mazars J. y Pijaudier-Cabot G. (1989).** "Continuum Damage Theory – Application to Concrete", J. Engng. Mech. ASCE, Vol. 115, pp. 354-365.
- [65] **Melan E. (1938).** "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums.", Ingenieur-Archiv, Vol. 9, pp. 116-126.
- [66] **Murakami S. y Ohno N. (1980).** "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage", Creep in Structures, A.R.S. Ponter, Ed. Third IUTAM Symposium, Springer-Verlag, New York, pp.422-453.
- [67] **Murakami S. (1983).** "Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory.", J. Engng. Mater. Technol. 105, pp. 99-105.

- [68] **Murray D.W., Chitnuyanondh L., Rijub-Agha K.Y. y Wong C. (1979).** "Concrete Plasticity Theory for Biaxial Stress Analysis.", ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division 105 (EM6), pp. 989-1006.
- [69] **Ngo D. y Scordelis A.C. (1967).** "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", J. Am. Concrete Inst. 64(14), pp. 152-163.
- [70] **Nicole L. (1999).** "Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Beam-Column Bridge Connections", Ph. D. Thesis, Universidad de California, Berkeley, pp. 266-274, Estados Unidos.
- [71] **Nilson A.H. (1968).** "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method", J. Am. Concrete Inst. 65(9), pp. 757-766.
- [72] **Odqvist F.K.G. (1933).** "Die Verfestigung von Flusseisenähnlichen Körpern", Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, vol. 13, pp. 360-363.
- [73] **Ohtani Y. y Chen W.F. (1988).** "Multiple Hardening Plasticity for Concrete.", ASCE Journal of Engineering Mechanics 114 (11), pp. 1890-1910.
- [74] **Oliver J., Cervera M., Oller S. y Lubliner J. (1990).** "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete", Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell Amsee – Austria, Vol. 2, pp 945-958.
- [75] **Oliver J. (1989).** "A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models.", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, pp. 461-474.
- [76] **Oller S. (2001).** "Fractura mecánica. Un enfoque global." CIMNE, Barcelona, España.
- [77] **Ortiz M. (1985).** "A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete", Mechanics of Materials 4 (1985) pp. 67-93.
- [78] **Perzyna P. (1966).** "Fundamental problems in viscoplasticity", Advances in applied mechanics, Vol. 9, pp. 244–368.
- [79] **Prager W. (1955).** "Probleme der Plastizitätstheorie.", Birkhäuser, Basel, Stuttgart, Alemania.

- [80] **Rashid Y.R. (1968).** "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", Nuclear Engng. and Design 7(4), pp. 334-344.
- [81] **Reinhardt H.W. (1984).** "Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material Like Concrete.", Heron 29 (2).
- [82] **Resende L. y Martin J.B. (1984).** "A Progressive Damage 'Continuum' Model for Granular Materials.", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 42, pp. 1-18.
- [83] **Rice J.R. (1968).** "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", Transaction ASME, Journal of Applied Mechanics, vol. 35, pp.379-386.
- [84] **RILEM 50-FMC Committee. (1985).** "Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beams.", Materials and Structures 18 (106), pp. 285-290.
- [85] **Rots J.G. (1988).** "Computational Modeling of Concrete Fracture", Tesis de doctorado, Univeridad de Tecnología de Delft, Holanda, pp 46-49.
- [86] **Runesson K., Ottosen N.S. y Peric D. (1991).** "Discontinuous Bifurcations of Elastic-Plastic Solutions at Plane Stress and Plane Strain", International Journal of Plasticity, vol. 7, pp. 99-121.
- [87] **Saint-Venant de B. (1870).** "Mémoire sur l'établissement des équiations différentielles mouvements intérieures opérés dan les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.", C.R. Acad.Arts Sci., pp. 70-473.
- [88] **Salami M.R. y Desai D.S. (1990).** "Constitutive Modeling including Multiaxial Testing of Plain Concrete under Low-Confining Pressure." ACI Materials Journal 87 (3), pp. 228-236.
- [89] **Sandler I.S., DiMaggio F.L. y Baladi G.Y. (1976).** "Generlized Cap Model for Geological Materials.", Journal of the Geotechnical Divison, ASCE 102 (GT7), pp. 683-699.
- [90] **Schofield A.N. y Wroth P. (1968).** "Critical State Soil Mechanics", McGraw-Hill, New York, Estados Unidos.

-
- [91] **Simo C. y Ju J. (1987).** "Stress and Strain Based Continuum Damage Models Part I and II", Int. J. Solids Structures, Vol. 23, pp. 821-840.
- [92] **Simo C. y Ju J. (1987a).** "Stress and Strain Based Continuum Damage Models: I. Formulation", Int. J. Solids Structures, Vol. 23, pp. 821-840.
- [93] **Simo C. y Ju J. (1987b).** "Stress and Strain Based Continuum Damage Models: II. Computational Aspects", Int. J. Solids Structures, Vol. 23, pp. 841-869.
- [94] **Taylor L. (2008).** "A Finite Element Analysis Program v8.2" Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley CA, Estados Unidos.
- [95] **Tresca. (1868).** "Mémoire sur l'écoulement des corps solides.", Mém. Prés. Par div. Sav., Vol. 18, pp. 733-799.
- [96] **Tvergaard V. (1981).** "Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plain Strain Conditions.", International Journal of Fracture, Vol.17, pp. 389-407.
- [97] **Tvergaard V. (1982).** "On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids.", International Journal of Fracture, Vol. 18, pp. 237-252.
- [98] **Tvergaard V. y Needleman A. (1984).** "Analysis of the Cup-cone Fracture in a Round Tensile Bar.", Acta Metallurgica, Vol. 32, pp. 157-169.
- [99] **Valanis K. C. (1991).** "A Global Damage Theory and the Hyperbolicity of the Wave Problem", J. Appl. Mech. ASME 58, pp. 311-316.
- [100] **Van Mier J.G.M. (1986).** "Fracture of Concrete under Complex Stress.", Heron 31 (3).
- [101] **Vermeer P.A. y de Borst R. (1984).** "Non-associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock.", Heron 29 (3).
- [102] **Vieira E. (2003).** "A Three Dimensional Setting for Strong Discontinuities Modelling in Failure Mechanics." Doctoral Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.

- [103] **Von Mises R. (1913).** "Mechanik der Festen Körper im Plastisch-deformablem Zustand.", Göttinger Nachr. Math.-Phys. Kl., Vol.1, pp. 582-592.
- [104] **Voyiadjis G. Z. y Deliktas B. (2000).** "A Coupled Anisotropic Damage Model for the Inelastic Response of Composite Materials", Compt. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 183, pp. 159-199.
- [105] **Wells G.N. y Sluys L.J. (2000).** "Application of Embedded Discontinuities for Softening Solids", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 65, pp. 263-281.
- [106] **Zaman M., Najjar Y.M. y Faruque M.O. (1993).** "Modelling of Stress-Strain Behaviour of Plain Concrete Using a Plasticity Framework.", Materials and Structures 26, pp. 129-135.
- [107] **Ziegler H. (1959).** "A Modification of Prager's Hardening Rule.", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 55-65.